FESTIGKEITSBERECHNUNG GRÖSSERER DREHSTROMMASCHINEN

VON

JULIUS SCHENK
GEPR. MASCHINENINGENIEUR.

VON DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE MÜNCHEN
ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES

DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
(DOKTOR-INGENIEURS)

GENEHMIGTE DISSERTATION.

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 24. JULI 1902.

REFERENT: DR. PHIL. AUG. FÖPPL, ORDENTL. PROFESSOR DER MECHANIK.
KORREFERENT: JOH. OSSANNA, ORDENTL. PROFESSOR DER ELEKTROTECHNIK.

MIT 45 FIGUREN IM TEXT UND AUF EINER DOPPELTAFEL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1903.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555418_0075

Vorwort.

Abweichend von dem im Maschinenbaue gewöhnlichen Wege Festigkeitsuntersuchungen anzustellen, wurde hier die im Bau-Ingenieurfache eingebürgerte Methode Castiglianos, welche sich auf einen bestimmten Zusammenhang zwischen Formänderungsarbeit, statisch unbestimmten Kräften und Verschiebung der Angriffspunkte dieser Kräfte gründet, benützt. Beim Beginne der Arbeit empfahl mir Herr Prof. Föppl die Anwendung dieser Rechnungsweise, und ich habe durch Befolgung seines Rates das Ziel unstreitig auf dem kürzesten und leichtesten Wege erreicht.

Um die Abhandlung möglichst übersichtlich zu gestalten, wurden nur die mechanischen Ansätze aufgenommen, die sich daran knüpfenden mathematischen Rechnungen weggelassen. Zur Durchführung einer solchen praktischen Trennung ist die Methode Castiglianos auch besonders geeignet.

Die Resultate sind öfters auf mehr Stellen ausgerechnet angegeben als notwendig ist; bei Ausführung der Untersuchung war aber diese Genauigkeit geboten. Es schien mir vorteilhaft auch in der Veröffentlichung von einer Kürzung abzusehen, und diese jedoch beim Gebrauche der Formeln zu empfehlen.

Der Verlagsbuchhandlung bin ich für die treffliche Ausführung des Druckes zu großem Danke verbunden.

München, im November 1902.

Julius Schenk.

Inhaltsübersicht.

Seite

Das Magnetrad. 2—14

Gleichförmige Drehung: 1. *Magnetrad ohne Pole* 2
2. *Berücksichtigung der Pole* 6
Beschleunigte oder verzögerte Drehung 8
Temperaturspannungen 10
Beispiel 11

Das Gehäuse. 15—59

I.

Der einfache Ring.

Stützung an den Enden des horizontalen Durchmessers des Schwerpunktskreises 16—24
Beanspruchung durch die Schwerkraft 16
Beanspruchung durch den radialen Polzug und durch die Temperaturspannungen 20
Beanspruchung durch die tangentiale Umfangskraft 21
Einfluß einer seitlich außerhalb des Ringes erfolgenden Stützung . . . . . 24—28
Beanspruchung durch die Schwerkraft 24
Beanspruchung durch die Umfangskraft 26
Ableitung der Ausdrücke für die Formänderungen des Ringes . . . . . 28—31
Bei Belastung durch die Schwerkraft 28
Bei Erwärmung des Ringes um T^0 Cels. 31

II.

Ring, gegen die Wirkungen der Schwerkraft versteift.

1. Gehäuse, welche in sich verspannt sind (Spannwerkgehäuse) . . . . . 32—41
Die Dreieckversteifung 32
Die Radialversteifung 35
Die Verspannung 37
Das Dreieck- und Radial-Spannwerkgehäuse in einem bestimmten Falle der Verspannung 39
2. Gehäuse, welche gegen das Fundament abgesteift sind 41
3. Gehäuse, welches zum Teile in sich, zum Teile mit dem Fundamente versteift ist 46

Einfluß einer Ausdehnung des Ringes infolge Erwärmung auf die Beanspruchung dieser Gehäusekonstruktionen.

Spannwerkgehäuse 48
Gehäuse, im oberen Halbringe durch eine horizontale Stange, im unteren durch Unterstützen des Scheitels versteift 51

Beispiel. 52—59

Belastung durch die Schwerkraft . . . . . 52—56
A. Der Ring unversteift verwendet 53
B. Der Ring mit Dreieckverspannung versehen 55
Spannungen infolge einer Erwärmung des Ringes . . . . . 56—59
A. Der Ring unversteift verwendet 56
B. Der Ring mit Dreieckverspannung versehen 57

Einleitung.

Die Untersuchungen über das Magnetrad sind nicht neu, das fast unter gleichen Verhältnissen arbeitende Schwungrad war schon Gegenstand einiger Veröffentlichungen. Dem Verfasser dieser Abhandlung sind bekannt:

Goebel, „Über Schwungradexplosionen", Z. d. V. d. Ing. 1898;

Bredt, „Festigkeit der Schwungräder", Z. d. V. d. Ing. 1901.

Das Gehäuse wurde von

Linsenmann, „Die elastische Linie von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern", E. T. Z. 1902 behandelt.

Einen beschreibenden Aufsatz gab

Lasche, „Der Aufbau und die planmäßige Herstellung der Drehstrom-Dynamomaschinen", Z. d. V. d. Ing. 1901.

Zur Durchführung der Rechnungen in der folgenden Arbeit wurde Castiglianos Methode angewendet: Die Formänderungsarbeit, welche bei Beanspruchung eines Körpers durch Kräfte geleistet wird, teilweise differentiiert nach einer der Kräfte, gibt die Verschiebung des Angriffspunktes dieser Kraft in ihrer Richtung; bei Momenten tritt an Stelle der Verschiebung die Drehung des Querschnittes. Ist nun die Verschiebung bekannt (bei den Anwendungen ist dieselbe gewöhnlich Null), so hat man eine lineare Gleichung, aus der die Kraft, falls dieselbe unbekannt ist, berechnet werden kann.

Bezüglich der Genauigkeit der Untersuchungen wäre zu bemerken, daß die Formänderung infolge der Biegungsmomente und soweit wie möglich die axiale Längenänderung durch die Normalkräfte berücksichtigt wurden. Die Formänderung durch die Schubkräfte wurde mit Rücksicht auf das Verhältnis von Stabquerschnitt zu Stablänge außer Betracht gelassen. Für Materialien wie Stahl, Stahlguß, Schweißeisen, Flußeisen, welche das Proportionalitätsgesetz befolgen, werden die angegebenen Formeln gut zutreffende Werte liefern, während dieselben für Gußeisen nur eine Schätzung gestatten, allerdings die bestmögliche. Natürlich müssen auch, um eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Ausführung zu erhalten, die Bedingungen für die Kräfte, welche außer den Nutzlasten zur Wirkung kommen, in beiden die gleichen sein.

Die Vorzeichen wurden wie in der Mechanik üblich festgesetzt. Positiv sind: Momente, welche im Uhrzeigersinne drehen; Normalkräfte, welche von der Angriffsfläche nach außen (vom Körper weg) gerichtet sind; Schubkräfte, welche am linken Teile des Stabes in der Zeichnung von unten nach oben bez. bei gekrümmten Stäben vom Krümmungsmittelpunkte nach außen gerichtet sind. Ist eine Kraft in der Abbildung eingetragen, so bezieht sich das Vorzeichen auf diese Zeichnung.

Das Magnetrad.

Die Hauptbeanspruchung des Magnetrades tritt bei seiner Rotation ein. Um die Festigkeitsrechnung für den bewegten Körper durchführen zu können, wird das d'Alembertsche Prinzip angewendet. Man bringt an dem Rade Hilfskräfte (Trägheitskräfte) an, die so gewählt sind, daß Gleichgewicht eintritt; diese Kräfte sind dann Lasten für den Körper. Die Bewegung eines Elementes des Rades wird im allgemeinen Geschwindigkeitsänderungen der Richtung und der Größe nach erfahren, man führt die Untersuchung für beide Fälle nach einander durch, die wirkliche Beanspruchung ergibt sich durch Summation der beiden.

Außerdem treten im Magnetrade auch Temperaturspannungen auf, die von einer Erwärmung des Kranzes durch die Pole herrühren.

Die nötigen Bezeichnungen sind:

Für den Radkranz:

R Radius des Schwerpunktskreises, F die Querschnittsfläche, Θ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche, t der Trägheitshalbmesser $\left(t^2 = \frac{\Theta}{F}\right)$, γ_x das spezifische Gewicht, E der Elastizitätsmodul.

Für die Arme:

Bei zylindrischer Form sei f die Querschnittsfläche, o das Trägheitsmoment derselben, bei konischer Form treten genügend genau die Mittelwerte aus Anfangs- und Endquerschnitt für f und o ein, n die Anzahl der Arme, 2α der Winkel zweier benachbarter Arme, γ_α das spezifische Gewicht, e der Elastizitätsmodul, g die Beschleunigung der Schwere.

Gleichförmige Drehung.

Die Trägheitskräfte sind an jedem Elemente radial, entgegengesetzt der Beschleunigung nach außen wirkend zu denken. Die Zentrifugalkraft der Pole faßt man als Einzellasten für den eigentlichen Radkörper auf, ihr Einfluß soll gesondert untersucht werden, zunächst also

1. Der Radkörper belastet durch die Zentrifugalkraft seiner Elemente.

Dank der Symmetrie des Ganzen genügt es, blos einen zwischen zwei benachbarten Armwinkelmittellinien liegenden Teil zu untersuchen, man muß nur die an den Trennungsstellen gleichartiger Teile auftretenden Kräfte als Lasten mit berücksichtigen. Diese sind für den Kranz ein Moment und eine Normalkraft, die Schubkraft ist aus Symmetriegründen Null. Die Nabe ist als starrer Körper zu betrachten, an der Übergangsstelle eines Armes zur Nabe tritt eine Normalkraft auf.

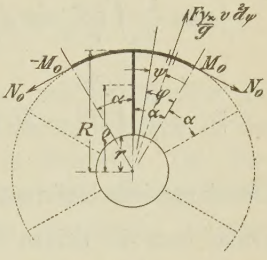


Fig. 1.

Die Geschwindigkeit im Schwerpunktskreise des Kranzes sei v. Man legt einen radialen Schnitt, der den Winkel φ mit dem Trennungs- bez. Anfangsquerschnitte bildet.

Im Anfangsquerschnitte — von nun ab mit Schnitt $\varphi = 0$ bezeichnet — sei das Moment M_0, die Normalkraft N_0. Im Schnitte φ ist:

$$\text{das Moment } M_0 + N_0 R(1 - \cos\varphi) - \int_0^{\varphi} F \frac{\gamma_x}{g} v^2 R \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= M_0 + N_0 R(1 - \cos\varphi) - F \frac{\gamma_x}{g} v^2 R(1 - \cos\varphi),$$

$$\text{die Normalkraft } N_0 \cos\varphi + \int_0^{\varphi} F \frac{\gamma_x}{g} v^2 \sin\psi \, d\psi$$

$$= N_0 \cos\varphi + F \frac{\gamma_x}{g} v^2 (1 - \cos\varphi).$$

Für den Arm ist in einem Schnitte ϱ:

die Normalkraft

$$2\left(- N_0 \sin\alpha + F \frac{\gamma_x}{g} v^2 \sin\alpha\right) + \int_{\varrho}^{r+l} f \frac{\gamma_\alpha}{g} \left(\frac{v}{R}\right)^2 \varrho \, d\varrho$$

$$= 2\left(- N_0 \sin\alpha + F \frac{\gamma_x}{g} v^2 \sin\alpha\right) + f \frac{\gamma_\alpha}{g} \left(\frac{v}{R}\right)^2 \cdot \frac{(r+l)^2 - \varrho^2}{2}.$$

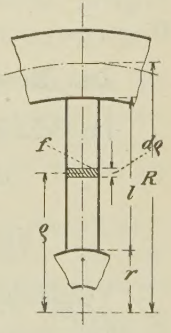


Fig. 2.

Das letzte Glied des Ausdruckes stellt die durch die Fliehkraft der Armelemente erzeugte Normalkraft dar, seine Herkunft ist aus Fig. 2 erklärlich. Momente und Schubkräfte können aus Symmetriegründen nicht entstehen.

Um die statisch unbestimmten Größen M_0 und N_0 kennen zu lernen, wird die Formänderungsarbeit für das Rad aufgestellt; dieselbe setzt sich aus der für den Kranz und jener für die Arme zusammen:

$$A = 2n\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\Big(M_0 + N_0 R(1-\cos\varphi) - F\frac{\gamma_z}{g}v^2 R(1-\cos\varphi)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi$$

$$+ 2n\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\Big(N_0\cos\varphi + F\frac{\gamma_z}{g}v^2(1-\cos\varphi)\Big)^2\frac{R}{EF}\,d\varphi$$

$$+ \quad n\frac{1}{2}\int_r^{r+l}\Big(2\Big(-N_0\sin\alpha + F\frac{\gamma_z}{g}v^2\sin\alpha\Big) + f\frac{\gamma_\alpha}{g}\Big(\frac{v}{R}\Big)^2\frac{(r+l)^2-\varrho^2}{2}\Big)^2\frac{d\varrho}{ef}\,.$$

Durch partielle Differentiation nach M_0 und N_0 und Nullsetzen dieser Ausdrücke erhält man die beiden Gleichungen $\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial N_0} = 0$; durch deren Auflösung kommt man zu folgenden Ergebnissen.

Im Schnitte $\varphi = 0$ ist:

$$\text{die Normalkraft } N_0 = F\frac{\gamma_z}{g}v^2(1 - C_\mathrm{I}),$$

wobei

$$C_\mathrm{I} = \frac{1 - \frac{E}{e}\cdot\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_z}\cdot\frac{1}{R^3}\cdot\frac{l^2}{6}(3r+2l)}{\frac{1}{2}\Big(\frac{R}{t}\Big)^2\Big(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha - 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\Big) + 2\frac{F}{t}\cdot\frac{E}{e}\cdot\frac{l}{R}\cdot\sin\alpha}$$

ist. Die Konstante C_I hat eine mechanische Bedeutung. $F\frac{\gamma_z}{g}v^2$ ist nämlich die im Kranze auftretende Normalkraft, wenn derselbe ohne Arme, also als reiner Schwungring, rotieren würde. Es stellt somit C_I mit $F\frac{\gamma_z}{g}v^2$ multipliziert den Einfluß der Arme dar und die leicht einzusehende Tatsache, daß die Arme die im Ringe auftretende Normalkraft verringern, bestätigt sich hierdurch; im Kranze treten allerdings dafür Biegungsspannungen auf.

Das Moment $M_0 = F\frac{\gamma_z}{g}v^2\cdot R\cdot C_\mathrm{I}\Big(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big)$.

Im Schnitte $\varphi = \alpha$ ist:

$$\text{die Normalkraft } N_\alpha = F\frac{\gamma_z}{g}v^2\cdot(1 - C_\mathrm{I}\cos\alpha),$$

$$\text{das Moment } M_\alpha = -F\frac{\gamma_z}{g}v^2\cdot R\cdot C_\mathrm{I}\Big(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha\Big).$$

Vergleicht man die Momente in den beiden genannten Querschnitten, so findet man, daß M_α größer als M_0 ist. Die Vorzeichen der Momente sind entgegengesetzt.

Im äußersten Querschnitte eines Armes ist

$$\text{die Normalkraft } 2F\frac{\gamma_z}{g}v^2\cdot C_\mathrm{I}\sin\alpha.$$

Im innersten Querschnitte eines Armes ist

$$\text{die Normalkraft} \quad F\frac{\gamma_z}{g}v^2\cdot\left(2\,C_\mathrm{I}\sin\alpha+\frac{f}{F}\cdot\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_z}\cdot\frac{1}{R^2}\,l\left(r+\frac{l}{2}\right)\right)$$

$$=2\,F\frac{\gamma_z}{g}v^2\,C_\mathrm{I}\sin\alpha+f\frac{\gamma_\alpha}{g}\left(\frac{v}{R}\right)^2 l\left(r+\frac{l}{2}\right).$$

Ist das Rad mehrteilig hergestellt, so kommt bei der gewöhnlich gebräuchlichen Anordnung der Stoßverbindung des Kranzes, nämlich an der Stelle $\varphi = 0$, für deren Berechnung M_0 und N_0 in Betracht. Die Verbindung an der Nabe hat die Summe der Projektionen der Armkräfte auf eine zur Teilungsebene senkrechte Richtung zu übertragen, so zum Beispiele für ein zweiteiliges sechsarmiges Rad

$$2\,F\frac{\gamma_z}{g}v^2\left(2\,C_\mathrm{I}\sin\alpha+\frac{f}{F}\cdot\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_z}\cdot\frac{1}{R^2}\,l\left(r+\frac{l}{2}\right)\right).$$

Die Stoßverbindungen müssen so ausgeführt sein, daß sie die Bedingung: die Stoßquerschnitte sollen sich nicht gegenseitig bewegen, unter allen Umständen erfüllen. Trifft dies nicht zu, so wird die Kräfteverteilung eine ganz andere als die rechnungsmäßige; besonders bei $\varphi = \alpha$ sind sehr große Biegungsmomente zu erwarten. Die Beobachtung, daß Schwungradbrüche gerade von den Segmenten ausgehen, in denen die Stoßverbindung sich befindet, dürfte wohl mit der nicht selten unrichtigen Ausführung derselben zu erklären sein. Man geht am sichersten, wenn man dafür sorgt, daß die beiden Kranzenden von Haus aus mit einer größeren Kraft als N_0 aufeinander gepreßt werden und daß das zur Erhaltung des Gleichgewichtes gegen Drehen nötige Kräftepaar mit dem Momente M_0 bereits in der Verbindung vorhanden ist.

Anmerkung:

Beim Magnetrade ist der Ringquerschnitt genügend groß um, falls das Rad mehrteilig hergestellt, die Stoßverbindung innerhalb desselben unterbringen zu können — bei Verwendung von Keilen, der immerhin besten Verbindungsart, ist dies sogar notwendig. Eine Berücksichtigung der Trägheitskräfte der dann höchstenfalls nur geringen Kranzerweiterung an den Stoßstellen ist nicht nötig.

Kleine Flanschangüsse auf der Innenseite sind vorteilhaft, da sie den Hebelarm des von der Stoßverbindung zu übertragenden Kräftepaares vergrößern. Die Ausbildung dieser Flansche zur Aufnahme von Schrauben muß als nicht gut bezeichnet werden; die Zugteile der Stoßverbindung sollen möglichst gegen den Umfang des Kranzes zu liegen. Siehe auch: „The bursting of small cast-iron fly-wheels“ by Chas. H. Benjamin, Cleveland, veröffentlicht in den Transactions of the American Society of mechanical engineers 1899.

Um die Rechnung zu erleichtern ist nachstehende Tabelle beigegeben.

Anzahl der Arme	4	6	8	10	12
α	0,78540	0,52360	0,39270	0,31416	0,26179
$\sin\alpha$	0,70711	0,50000	0,38268	0,30902	0,25882
$\cos\alpha$	0,70711	0,86603	0,92388	0,95106	0,96593
$\frac{\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha$	1,81783	1,91323	1,95006	1,96769	1,97741
$\frac{\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha-2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$	0,01719	0,00337	0,00108	0,00041	0,00009
$1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}$	0,09968	0,04507	0,02552	0,01636	0,01134
$\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha$	0,19321	0,08890	0,05061	0,03258	0,02273
$\alpha-\sin\alpha$	0,07829	0,02360	0,01002	0,00514	0,00297

2. Der Radkörper belastet durch die Zentrifugalkraft der Pole.

Mit Rücksicht auf eine brauchbare Rechnung ist es notwendig anzunehmen daß die Pole in gleichen Abständen symmetrisch zu den Armen befestigt seien. In den meisten Fällen wird diese Voraussetzung zutreffen, wenn nicht, so nimmt man für die Festigkeitsuntersuchung die zunächst liegende Polzahl, welche obige Bedingungen erfüllt und ebenso eine entsprechende Polanordnung, an. Man kann, gleich dem vorhergehenden Falle, sich begnügen, nur ein Segment, wie es Fig. 3 darstellt, zu untersuchen.

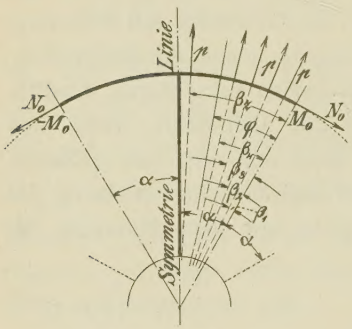


Fig. 3.

Die Zentrifugalkraft eines Poles sei p, das Gewicht q und der Abstand des Schwerpunktes eines Poles vom Radmittelpunkte R_p, dann ist:

$$p = \frac{q}{g}\left(\frac{v}{R}\right)^2 R_p,$$

die Anzahl der Pole für die Bogenlänge α sei z.

Im Schnitte $\varphi = 0$ sind wieder das Moment M_0 und die Normalkraft N_0.

Legt man einen Schnitt unter dem Winkel φ zum Anfangsquerschnitte, so ist für ersteren:

das Moment $M_0 + N_0 R(1 - \cos\varphi) - pR\Sigma\sin(\varphi - \beta)$,

die Normalkraft $N_0\cos\varphi + p\Sigma\sin(\varphi - \beta)$.

Für einen Schnitt durch den Arm:

$$\text{die Normalkraft } 2\left(-N_0 \sin\alpha + p\sum_{\beta_1}^{\beta_z}\cos(\alpha-\beta)\right).$$

Die im Körper vorhandene Formänderungsarbeit

$$A = 2n\frac{1}{2}\int_0^{\beta_1}\left(M_0 + N_0 R(1-\cos\varphi)\right)^2\frac{R}{E\Theta}d\varphi$$

$$+ 2n\frac{1}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(M_0 + N_0 R(1-\cos\varphi) - pR\sin(\varphi-\beta_1)\right)^2\frac{R}{E\Theta}d\varphi + \cdots$$

$$+ 2n\,\frac{1}{2}\int_0^{\beta_1}\left(N_0\cos\varphi\right)^2\frac{R}{EF}d\varphi + 2n\frac{1}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(N_0\cos\varphi + p\sin(\varphi-\beta_1)\right)^2\frac{R}{EF}d\varphi + \cdots$$

$$+ \quad n\frac{1}{2}\int_r^{r+l}\left(2\left(-N_0\sin\alpha + p\sum_{\beta_1}^{\beta_z}\cos(\alpha-\beta)\right)^2\frac{d\varrho}{ef}\right.$$

Aus den beiden Gleichungen $\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial N_0} = 0$ ergibt sich für den Schnitt $\varphi = 0$:

Die Normalkraft

$$N_0 = \frac{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{R}{t}\right)^2+1\right)\left(\sum\beta\sin\beta - \alpha\sum\sin\beta + \sin\alpha\sum\sin(\alpha-\beta)\right) +}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{t}\right)^2\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha-2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha\right)+\right.}$$

$$\left.+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{R}{t}\right)^2\cdot\left(z-\sum\cos(\alpha-\beta)\right)+2\frac{E}{e}\cdot\frac{F}{f}\cdot\frac{l}{R}\sin\alpha\sum\cos(\alpha-\beta)}{+\,2\frac{E}{e}\cdot\frac{F}{f}\cdot\frac{l}{R}\cdot\sin\alpha\Big]\sin\alpha}\,\frac{q}{g}\left(\frac{v}{R}\right)^2 R_p.$$

Die Summen erstrecken sich von $\beta = \beta_1$ bis $\beta = \beta_z$.

$$\text{Das Moment } M_0 = -N_0 R\frac{\alpha-\sin\alpha}{\alpha} + \frac{pR}{\alpha}\left(z - \sum_{\beta_1}^{\beta_z}\cos(\alpha-\beta)\right).$$

Im Schnitte $\varphi = \alpha$:

$$\text{die Normalkraft } N_\alpha = N_0\cos\alpha + p\sum_{\beta_1}^{\beta_z}\sin(\alpha-\beta),$$

$$\text{das Moment } M_\alpha = M_0 + N_0 R(1-\cos\alpha) - pR\sum_{\beta_1}^{\beta_r}\sin(\alpha-\beta).$$

In einem Querschnitte des Armes ist

$$\text{die Normalkraft } 2\left(-N_0\sin\alpha + p\sum_{\beta_1}^{\beta_z}\cos(\alpha-\beta)\right).$$

Für die Stoßverbindung erfolgt die Berechnung ähnlich wie früher.

Bei genügend großer Polzahl kann eine befriedigende Annäherung dadurch erreicht werden, daß man sich die Polgewichte, mit dem Faktor $\frac{R_p}{R}$ multipliziert, über den ganzen Radumfang ausgeschlagen denkt. Es kommt dann der Belastungsfall 1 in Betracht, und ist bei der Ausrechnung für das spezifische Gewicht γ_z der Quotient

$$\frac{\text{Gewicht des Kranzes} + \text{Reduziertes Gewicht der Pole}}{\text{Volumen des Kranzes}}$$

zu setzen.

Beschleunigte oder verzögerte Drehung.

Das Magnetrad ist im allgemeinen durch die Welle noch in fester Verbindung mit anderen Körpern z. B. Kurbeln, Schwungrad, Schubstangen etc. Kommt nun an dem ganzen Systeme ein Moment — mit M bezeichnet — zur Wirkung[1]), so tritt für den rotierenden Teil eine Änderung in der Winkelgeschwindigkeit ein, und zwar ist diese, wenn J das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf die Welle bezeichnet, gleich $\frac{M}{J}$. — Bei der Berechnung von J brauchen nur die Räder in Berücksichtigung gezogen zu werden. Für ein Magnetrad ist das Trägheitsmoment genügend genau

$$F\,\frac{\gamma_z}{g}\,R^3 \,.\, 2\pi + nf\,\frac{\gamma_\alpha}{g}\,\frac{(r+l)^3}{3} + 2nz\,\frac{q}{g}\,R_p^{\,2},$$

für Schwungräder fällt das letzte Glied weg. Die Beschleunigung im Schwerpunktskreise des Magnetrades ist dann $b = R\,\frac{M}{J}$.

Um Gleichgewicht herzustellen denkt man sich an jedem Elemente tangential zu seiner Bahn und entgegengesetzt der Beschleunigung also auch dem Momente M Trägheitskräfte angebracht. Die Beanspruchung ist für die durch die Armwinkel-Mittellinien ausgeschnittenen Radsektoren gleich, außerdem sind die in jedem Sektor zum Arme symmetrisch liegenden Teile der Größe nach gleich, im Vorzeichen entgegengesetzt, beansprucht. (Siehe auch Seite 21, 22.) In den Endquerschnitten der Sektoren können nur Schubkräfte, wie in Fig. 4 eingezeichnet, auftreten; Normalkräfte und Momente sind dort ausgeschlossen, denn dieselben müssen beim Aneinanderfügen der Sektoren nach dem Wechsel-

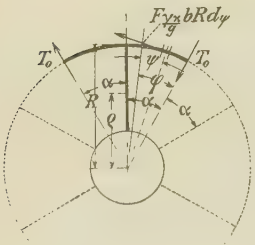


Fig. 4.

1) Beim Anlaufen und Abstellen der Maschine kommt das Moment an der Welle zum Angriffe.

wirkungsgesetze für je zwei sich berührende Endquerschnitte benachbarter Sektoren entgegengesetztes Vorzeichen haben. Dies widerspricht aber den für jeden Sektor gültigen, obigen Beziehungen für symmetrisch liegende Querschnitte. Beide Bedingungen werden nur erfüllt, wenn Normalkraft und Moment Null sind.

Mit Rücksicht auf die mit großer Willkür verbundene Annahme von M ist eine Näherungsrechnung gerechtfertigt.

Zunächst denkt man sich die Polgewichte, wie bei der Radialbelastung, mit dem Reduktionsfaktor $\frac{R_p}{R}$ multipliziert über den Radumfang gleichmäßig verteilt. Außerdem ist bei den Magneträdern das Trägheitsmoment des Kranzes gegenüber jenem der Arme so groß, daß die Formänderung des Kranzes unberücksichtigt bleiben kann[1]).

Ist T_0 die Schubkraft an den Endquerschnitten eines Radausschnittes, so ist für einen Schnitt φ im Kranze:

$$\text{das Moment } T_0 R \sin\varphi - F\frac{\gamma_z}{g} bR^2(\varphi - \sin\varphi),$$

$$\text{die Normalkraft } -T_0 \sin\varphi - F\frac{\gamma_z}{g} bR \sin\varphi.$$

Für einen Schnitt ϱ im Arme:

$$\text{das Moment } 2\left(T_0\varrho \sin\alpha - F\frac{\gamma_z}{g} bR(R\alpha - \varrho\sin\alpha)\right).$$

Die Formänderungsarbeit im Radkörper ist:

$$A = n\cdot\frac{1}{2}\int_{r}^{r+l}\left(2(T_0\varrho\sin\alpha - F\frac{\gamma_z}{g} bR(R\alpha-\varrho\sin\alpha)\right)^2 \frac{d\varphi}{eo}.$$

Aus der Gleichung $\frac{\partial A}{\partial T_0} = 0$ ergibt sich:

die Schubkraft $T_0 = F\frac{\gamma_z}{g} bR(C_{II} - 1)$, wobei $C_{II} = \frac{R\alpha(2r+l)}{2\sin\alpha\left(r(r+l)+\frac{l^2}{3}\right)}$.

Im Schnitte α:

$$\text{das Moment } M_\alpha = F\frac{\gamma_z}{g} b\cdot R^2(C_{II}\sin\alpha - \alpha),$$

$$\text{die Normalkraft } N_\alpha = -F\frac{\gamma_z}{g} bRC_{II}\sin\alpha.$$

Im äußersten Querschnitte eines Armes:

$$\text{das Moment } 2F\frac{\gamma_z}{g} bR\left(r+l)C_{II}\sin\alpha - R\alpha\right),$$

$$\text{die Schubkraft } 2F\frac{\gamma_z}{g} bRC_{II}\sin\alpha.$$

1) Die Momente infolge der kragenden Anordnung der Pole sind gleichfalls weggelassen; es wird dadurch die, für die Beanspruchung des hauptsächlich in Betracht kommenden äußersten Armquerschnittes, immerhin zu ungünstige Annahme eines starren Kranzes etwas ausgeglichen.

Im innersten Querschnitt eines Armes:

$$\text{das Moment } -2F\frac{\gamma_z}{g}bR(R\alpha - rC_{\text{II}}\sin\alpha).$$

Für die Arme ist die Verteilung der Momente derart, daß dieselben von außen nach innen zu abnehmen, ungefähr in der Mitte zu Null werden und von dort ab mit entgegengesetztem Vorzeichen wieder anwachsen.

Temperaturspannungen.

Im Anschlusse an die Untersuchung 1 für gleichförmige Drehung soll jene für die Temperaturspannungen vorgenommen werden. Man kann sich nämlich den zuerst genannten Belastungsfall geteilt denken, in einen, wobei der von den Armen befreite Kranz durch die Zentrifugalkräfte belastet und in einen zweiten, wo der Kranz an seinen Verbindungsstellen mit den Armen durch radiale, den Armquerschnitten entsprechende Kräfte nach innen gezogen wird.

Die zweite Beanspruchungsart tritt nun auch bei einer Ausdehnung des Ringes infolge Erwärmung desselben ein, und man kann die früher gefundenen Formeln benützen, wenn man die Bedingung einführt, daß die durch die Zentrifugalkräfte erfolgende Erweiterung des freien Ringes gleich jener durch die Erwärmung erzeugten ist.

Bezeichnet T den Unterschied zwischen Kranz- und Arm-Temperatur, λ den Ausdehnungskoeffizienten $\left(\text{für Eisen} = \frac{1}{80000}\right)$, so wird die in Betracht kommende Ausdehnung des Kranzes infolge der Erwärmung $2R\pi\lambda T$ sein. Die Kraft $F\frac{\gamma_z}{g}v^2$ bringt eine Dehnung $F\frac{\gamma_z}{g}v^2\frac{2R\pi}{EF}$ hervor. Diese Ausdrücke gleichgesetzt gibt:

$$F\frac{\gamma_z}{g}v^2 = \lambda TEF.$$

Im Schnitte $\varphi = 0$ ist:

$$\text{das Moment } M_0 = \lambda TEF\cdot C_{\text{III}}\cdot R\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right),$$

$$\text{die Normalkraft } N_0 = -\lambda TEF\cdot C_{\text{III}},$$

wobei

$$C_{\text{III}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{t}\right)^2\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha - 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right) + 2\frac{E}{e}\cdot\frac{F}{f}\cdot\frac{l}{R}\cdot\sin\alpha}$$

ist.

Im Schnitte $\varphi = \alpha$ ist:

$$\text{das Moment } M_\alpha = -\lambda TEF\cdot C_{\text{III}}\cdot R\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha\right),$$

$$\text{die Normalkraft } N_\alpha = -\lambda TEF\cdot C_{\text{III}}\cdot\cos\alpha.$$

Die Zugbeanspruchung eines Armes ist: $2 \cdot \lambda TEF \cdot C_{III} \cdot \sin \alpha$.

Bei mehrteiligen Rädern ist noch die Beanspruchung der Nabenverbindung zu berücksichtigen; z. B. für ein zweiteiliges sechsarmiges Rad: $2\lambda TEF \cdot C_{III}$.

Beispiel.

Ein gußeisernes Magnetrad hat folgende Dimensionen:

Für den Kranz: $R = 284$ cm, $F = 2820$ cm^2, $\Theta = 646\,800$ cm^4,

$$t^2 = \frac{\Theta}{F} = 229{,}5 \text{ cm}^2;$$

für die Arme: $l = 205$ cm, $f = 1188$ cm^2, $o = 128\,300$ cm^4,

$n = 8$, $\alpha = 0{,}39\,270$;

für die Nabe: $r = 51$ cm;

für die Pole: $q = 196{,}6$ kg, $z = 4$, $\beta_1 = 0{,}04909$, $\beta_2 = 0{,}14726$,

$R_p = 326$ cm, $\beta_3 = 0{,}24544$, $\beta_4 = 0{,}34361$.

Spezifisches Gewicht des Gußeisens $0{,}00725 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$, $g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$.

Berechnung der Kräfte und Momente in den Schnitten o und α des Kranzes und in den äußersten und innersten Armquerschnitten:

1. Gleichförmige Drehung.

$v = 2530 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ (größte Umfangsgeschwindigkeit).

a) Magnetrad ohne Pole.

Zunächst folgende Ausdrücke berechnet:

$$F \frac{\gamma_\varkappa}{g} v^2 = 133\,300 \text{ kg},$$

$$C_{\text{I}} = \frac{1 - \frac{E}{e} \cdot \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\varkappa} \cdot \frac{1}{R^3} \frac{l^2}{6} (3r + 2l)}{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{t}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha - 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right) + 2\frac{F}{f} \cdot \frac{E}{e} \cdot \frac{l}{R} \sin\alpha}$$

$$= \frac{1 - 0{,}175}{0{,}188 + 0{,}975 + 1{,}310} = 0{,}335.$$

Für den Kranz:

$$N_0 = F \frac{\gamma_\varkappa}{g} v^2 (1 - C_{\text{I}}) = 89\,000 \text{ kg},$$

$$M_0 = F \frac{\gamma_\varkappa}{g} v^2 R C_{\text{I}} \left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = 323\,000 \text{ cmkg},$$

$$N_\alpha = F \frac{\gamma_\varkappa}{g} v^2 (1 - C_{\text{I}} \cos\alpha) = 92\,300 \text{ kg},$$

$$M_\alpha = -F \frac{\gamma_\varkappa}{g} v^2 R C_{\text{I}} \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha\right) = -640\,000 \text{ cmkg}.$$

Für die Arme:

Querschnitt außen (am Kranze) $N = 2 \cdot F \frac{\gamma_z}{g} v^2 C_\mathrm{I} \sin\alpha = 34\,000$ kg,
$M = 0$;

Querschnitt innen (an der Nabe)

$$N = F \frac{\gamma_z}{g} v^2 \left(2 C_\mathrm{I} \sin\alpha + \frac{f}{F} \cdot \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_z} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot l \left(r + \frac{l}{2}\right)\right) = 56\,000 \text{ kg},$$
$$M = 0.$$

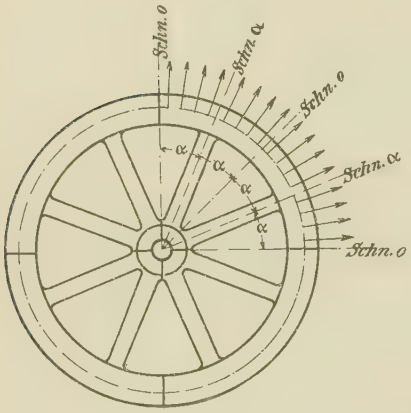


Fig. 5.

Das Rad ist vierteilig hergestellt, die Anordnung der Teilung ist aus Fig. 5 ersichtlich.

Für die Stoßverbindung des Kranzes:

$N_0 = 89\,000$ kg, $M_0 = 323\,500$ cmkg.

Für die Verbindung der Nabe:

$$N = 56\,000\,(\cos\alpha + \cos 3\alpha)$$
$$= 73\,000 \text{ kg}, \quad M = 0.$$

b) Der Radkörper belastet durch die Zentrifugalkraft der Pole.

$$\sum_{\beta_1}^{\beta_4} \sin\beta = 0{,}77584, \quad \sum_{\beta_1}^{\beta_4} \cos\beta = 3{,}89955, \quad \sum_{\beta_1}^{\beta_4} \beta \sin\beta = 0{,}19942,$$

$$p = \frac{q}{g} \left(\frac{v}{R}\right)^2 R_p = 5180 \text{ kg}.$$

Für den Kranz:

$$N_0 = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{R}{t}\right)^2 + 1\right)\left(\sum_{\beta_1}^{\beta_z} \beta \sin\beta - (\alpha - \sin\alpha) \sum_{\beta_1}^{\beta_z} \sin\beta\right) + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{R}{t}\right)^2 \left(z - \sum_{\beta_1}^{\beta_z} \cos\beta\right)$$
$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{t}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha - 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right)\right.$$
$$+ 2 \cdot \frac{E}{e} \cdot \frac{F}{f} \cdot \frac{l}{R} \cdot \sin\alpha \sum_{\beta_1}^{\beta_z} \cos\beta$$
$$\left. + 2\frac{E}{e} \cdot \frac{F}{f} \cdot \frac{l}{R} \sin\alpha\right] \sin\alpha \cdot \frac{q}{g}\left(\frac{v}{R}\right)^2 R_p$$
$$= 6{,}13 \cdot 5180 = 31\,700 \text{ kg},$$

$$M_0 = -N_0 R \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha} + \frac{p R}{\alpha}\left(z - \sum_{\beta_1}^{\beta_z} \cos\beta\right) = 146\,280 \text{ cmkg},$$

$$N_\alpha = N_0 \cos\alpha + p \sum_{\beta_1}^{\beta_z} \sin\beta = 33\,280 \text{ kg},$$

$$M_\alpha = M_0 + N_0 R(1 - \cos\alpha) - pR\sum_{\beta_1}^{\beta_z}\sin\beta = -308\,800 \text{ kg}.$$

Für die Arme:

$$N = 2(-N_0 \sin\alpha + p\sum_{\beta_1}^{\beta_z}\cos\beta) = 16\,100 \text{ kg},$$

$$M = 0.$$

Für die Verbindung des Kranzes:

$$N_0 = 31\,700 \text{ kg}, \quad M_0 = 146\,200 \text{ cmkg}.$$

Für die Verbindung der Nabe:

$$N = 16\,100(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = 21\,050 \text{ kg}, \quad M = 0.$$

Die Kräfte und Momente im Magnetrade infolge der gleichförmigen Drehung ergeben sich durch Summation der Werte für Belastungsfall *a* und *b*.

Für den Kranz:

$$N_0 = 89\,000 + 31\,700 = 120\,700 \text{ kg},$$

$$M_0 = 323\,000 + 146\,200 = 469\,200 \text{ cmkg},$$

$$N_\alpha = 92\,300 + 33\,280 = 125\,580 \text{ kg},$$

$$M_\alpha = -640\,000 - 308\,800 = -948\,000 \text{ cmkg}.$$

Für die Arme:

Querschnitt außen (am Kranze):

$$N = 34\,000 + 16\,100 = 50\,100 \text{ kg}, \quad M = 0;$$

Querschnitt innen (an der Nabe):

$$N = 56\,000 + 16\,100 = 72\,100 \text{ kg}, \quad M = 0.$$

Für die Stoßverbindungen des Kranzes:

$$N_0 = 120\,700 \text{ kg}, \quad M_0 = 469\,200 \text{ cmkg}.$$

Für die Verbindung an der Nabe:

$$N = 73\,000 + 21\,050 = 94\,050 \text{ kg},$$

$$M = 0.$$

Zur Prüfung der Zulässigkeit des auf Seite 8 angegebenen abgekürzten Verfahrens sei hiernach die Rechnung nochmals durchgeführt.

Reduziertes Polgewicht: $q \cdot \frac{R_p}{R} = 226$ kg.

Die Polgewichte über den Radumfang ausgeschlagen; spezifisches Gewicht des Kranzes: $\gamma_z = 0{,}00725 + \frac{64 \cdot 226}{2 \cdot 284 \cdot 3{,}14 \cdot 2820} = 0{,}01012$,

$$F \frac{\gamma_z}{g} v^2 = 186\,500 \text{ kg},$$

$$C_\mathrm{I} = \frac{1 - 0{,}175 \cdot \frac{0{,}00725}{0{,}01012}}{0{,}188 + 0{,}975 + 1{,}310} = 0{,}354.$$

Für den Kranz:

$$N_0 = 120\,500 \text{ kg}, \quad M_0 = 478\,000 \text{ cmkg},$$
$$N_\alpha = 125\,500 \text{ kg}, \quad M_\alpha = -\,950\,000 \text{ cmkg}.$$

Für die Arme:

Querschnitt außen (am Kranze): $N = 50\,500$ kg, $M = 0$;

Querschnitt innen (an der Nabe): $N = 72\,500$ kg, $M = 0$.

Für die Stoßverbindungen des Kranzes:

$$N_0 = 120\,500 \text{ kg}, \quad M_0 = 478\,000 \text{ cmkg}.$$

Für die Verbindung der Nabe:

$$N = 94\,300 \text{ kg}, \quad M = 0.$$

2. Beschleunigte oder verzögerte Drehung.

$$C_\mathrm{II} = \frac{R\alpha(2r + l)}{2 \sin\alpha \left(r(r + l) + \frac{l^2}{3}\right)} = 1{,}65, \quad F \frac{\gamma_z}{g} b \cdot R = 8{,}26\, b.$$

Für den Kranz:

$$T_0 = F \frac{\gamma_z}{g} b \cdot R \cdot (C_\mathrm{II} - 1) = 5{,}37\, b,$$

$$N_\alpha = -F \frac{\gamma_z}{g} b R C_\mathrm{II} \sin\alpha = -5{,}22\, b, \quad M_a = F \frac{\gamma_z}{g} b R^2 (C_\mathrm{II} \sin\alpha - \alpha) = 560{,}0\, b.$$

Für die Arme:

Querschnitt außen (am Kranze) $T = 2F \frac{\gamma_z}{a} b R C_\mathrm{II} \sin\alpha = 10{,}44\, b$,

$$M = 2F \frac{\gamma_z}{g} \left(b R (r + l) C_\mathrm{II} \sin\alpha - R\alpha\right) = 830\, b;$$

Querschnitt innen (an der Nabe) $M = -2F \frac{\gamma_z}{g} b R (R\alpha - r C_\mathrm{II} \sin\alpha) = -1310\, b.$

Ermittelung der Spannungen in den Schnitten o und α des Kranzes und in den äußersten und innersten Armquerschnitten bei gleichförmiger Drehung.

Das Widerstandsmoment des Kranzquerschnittes ist: $W = 24\,810$ cm^3.

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{F} + \frac{M_0}{W} = 42{,}8 + 19{,}8 = 62{,}6 \text{ atm},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{F} + \frac{M_\alpha}{W} = 44{,}6 + 38{,}3 = 82{,}9 \text{ atm}.$$

Arm-Querschnitt außen (am Kranze) $\sigma = \frac{N}{f} = 42{,}2$ atm,

Arm-Querschnitt innen (an der Nabe) $\sigma = \frac{N}{f} = 60{,}6$ atm.

Für den Fall, daß die Arme gegen den Kranz verjüngt sind, müssen zur Berechnung der Spannungen die wirklichen Querschnitte eingeführt werden.

Das Widerstandsmoment des Armquerschnittes ist: $w = 7130$ cm^3.

Das Gehäuse.

Dieses soll bei folgenden Belastungen betrachtet werden:

Beanspruchung durch das Eigengewicht, Gewicht der Blechpakete und Wicklungen, wobei vorausgesetzt ist, daß die Übertragung der Kräfte vom Paket auf das Gehäuse als gleichförmig angesehen werden kann. Trägt der Blechpaketring sich selbst, so muß die Übertragung der Kräfte von Blech zu Blech durch Reibung gesichert sein.

Beanspruchung durch Ausdehnung des Ringes bez. Gehäuses infolge einer Erwärmung desselben.

Endlich Beanspruchung durch gleichförmig verteilte, gleiche, radiale und tangentiale magnetische Kräfte. (Soll nur für das einfachste Gehäuse durchgeführt werden.)

I.

Es wird ein Gehäuse betrachtet, das aus einem einfachen, im spannungslosen Zustande genau kreisförmigen Ringe besteht. Der Ring ist seitlich in der Nähe des horizontalen Durchmessers gestützt.

Außer den obengenannten Lasten treten am Gehäuse noch Auflagerkräfte bez. Momente auf, die von der Art der Verbindung mit dem Fundamente abhängen und je nach der Lagerung eine besondere Beanspruchung des Gehäuses verursachen.

Im allgemeinen kann ein Auflager auf einen Körper ein Moment und eine Einzelkraft ausüben; ist die Lagerung gelenkartig ausgebildet, also eine Drehung des Körpers in derselben möglich, so wird nur eine Einzelkraft übertragen, und endlich ruht der Körper in einem Gleitlager, so kommt eine Einzelkraft von bestimmter Richtung zur Wirkung. Hat ein Körper zwei Auflager, so kommen, falls Symmetrie vorhanden, immer solche gleicher Art zur Ausführung; nur wenn ein Lager verschieblich ist, wird das andere gelenkartig ausgebildet. Für diese drei Auflagerungsarten soll das Gehäuse untersucht werden. Um faßbare Resultate zu erhalten, müssen über die Auflagerbedingungen noch genauere Annahmen

gemacht werden und zwar soll im ersten Falle das einzuführende Moment und die Einzelkraft so groß sein, daß die Auflagerstelle des Ringes völlig in ihrer Lage verbleibt, also unbeweglich ist. (Man bezeichnet diese Auflagerung auch vielfach als Einspannung.) Im zweiten Falle soll die Einzelkraft eine Verschiebung der Stützpunkte völlig verhindern und im dritten soll die Verschieblichkeit auf der Gleitfläche reibungslos sein, der Auflagerdruck hat dann eine Richtung senkrecht zu dieser Fläche. — Zur Vereinfachung der Rechnung soll ferner der Gehäusering konstanten Querschnitt haben und **die Stützung** desselben **soll an den Enden des horizontalen Durchmessers des Schwerpunktskreises erfolgen.** Die Beurteilung des Einflusses dieser Abweichungen von der wirklichen Ausführung soll einer, bei passender Gelegenheit erfolgenden, Untersuchung vorbehalten bleiben.

Es bezeichne:

R den Radius des Schwerpunktskreises des Ringes,

F die Größe der Querschnittsfläche des Ringes,

Θ das Trägheitsmoment derselben in Bezug auf die horizontale Schwerpunktsachse,

t den Trägheitshalbmesser $\left(t = \sqrt{\frac{\Theta}{F}}\right)$,

E den Elastizitätsmodul des Materiales des Ringes.

Alle diese Größen beziehen sich auf den tragenden Teil des Ringes.

Beanspruchung durch die Schwerkraft.

γ bezeichne das spezifische Gewicht, worunter der Quotient aus Gesamtgewicht des Ringes und Volumen des tragenden Ringteiles zu verstehen ist.

Die Auflager sind eingespannt.

Die beiden durch den horizontalen Durchmesser getrennten Ringhälften haben bis auf das Vorzeichen die gleiche Belastung. Dies gibt die Veranlassung, nur eine Hälfte als selbständigen Halbring zu untersuchen, wobei die dem ganzen Ringe vorgeschriebenen Auflagerbedingungen auch entsprechend an den Horizontalschnitten eingeführt werden müssen. Ist die Beanspruchung einer Ringhälfte bekannt, so ist sie für die andere der Größe nach gleich, im Vorzeichen entgegengesetzt.

Aus Symmetriegründen kann man die Rechnung auch noch auf einen Quadranten beschränken.

In den Horizontalschnitten greifen ein Moment und eine Einzelkraft an, die letztere in eine horizontale und vertikale Komponente zerlegt.

Das Moment sei mit M_0, die Schubkraft mit T_0 bezeichnet, die Normalkraft bestimmt sich aus dem Gleichgewichte gegen Verschieben in

der Lotrichtung zu $F\gamma R\frac{\pi}{2}$. Den Ring selbst denkt man sich in Elemente von der Breite $Rd\varphi$ zerlegt (siehe Fig. 6). Im Schwerpunkte eines Elementes ist sein Gewicht $FRd\varphi\gamma$ vereinigt.

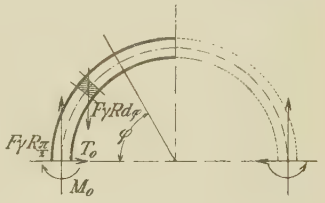


Fig. 6.

Für den Schnitt φ ist:

das Moment

$$M = M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

die Normalkraft

$$N = -F\gamma R\frac{\pi}{2}\cos\varphi - T_0\sin\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi,$$

die Schubkraft $T = F\gamma R\frac{\pi}{2}\sin\varphi - T_0\cos\varphi - F\gamma R\varphi\sin\varphi$.

Die Formänderungsarbeit für den Ringquadranten:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\right)^2\frac{R}{E\Theta}d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-F\gamma R\frac{\pi}{2}\cos\varphi - T_0\sin\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi\right)^2\frac{R}{EF}d\varphi.$$

Aus den Gleichungen $\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0$ und $\frac{\partial A}{\partial T_0} = 0$ ergibt sich:

Für den Horizontalschnitt:

das Moment $M_0 = F\gamma R^2(-0{,}29756 + C_{\mathrm{I}}\cdot 0{,}63662)$,

die Schubkraft $T_0 = F\gamma R\cdot C_{\mathrm{I}}$, wobei

$$C_{\mathrm{I}} = \frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2\cdot 0{,}19028 - 0{,}78540}{\left(\frac{R}{t}\right)^2\cdot 0{,}29756 + 1{,}57080}\ \text{ist.}$$

Nach den allgemeinen Ausdrücken für M, N und T können diese Größen, da M_0 und T_0 nun bekannt, für jede beliebige Schnittstelle berechnet werden, z. B.

für den Scheitelschnitt:

das Moment $+ F\gamma R^2(0{,}27324 - C_{\mathrm{I}}\cdot 0{,}36338)$,

die Normalkraft $- F\gamma R\cdot C_{\mathrm{I}}$,

die Schubkraft 0.

Für die bei diesen Rechnungen in Betracht kommende Genauigkeit genügt es, wenn man $C_{\mathrm{I}} = \frac{0{,}19028}{0{,}29756} = 0{,}63947$ setzt, also den Einfluß

der Normalkräfte auf die axiale Längenänderung vernachlässigt[1]). Am Schlusse der Gehäuseuntersuchung ist ein Zahlenbeispiel mit und ohne Berücksichtigung der Normalkräfte durchgeführt und es bestätigt die Zulässigkeit dieser Kürzung.

Für den Horizontalschnitt ist dann: Für den Scheitelschnitt:

$M_0 = F\gamma R^2 \cdot 0{,}10954$, das Moment $+ F\gamma R^2 \cdot 0{,}04087$,

$N_0 = F\gamma R \cdot 1{,}57080$, die Normalkraft $- F\gamma R \cdot 0{,}63947$,

$T_0 = F\gamma R \cdot 0{,}63947$. die Schubkraft 0.

Der Ring als Ganzes genommen übt keinen Horizontalschub aus, an den Auflagern heben sich die von beiden Ringhälften herrührenden Schubkräfte auf. Die Normalkräfte und die Einspannmomente addieren sich; der Auflagerdruck wirkt vertikal nach oben und ist gleich $2N_0$; das Moment, welches vom linken Auflager ausgeübt $+ 2M_0$, jenes vom rechten $- 2M_0$.

Gelenkartige Lagerung.

Es ist die gleiche Zerlegung wie im vorigen Falle zulässig. Eine Wiedervereinigung der Halbringe zu einem geschlossenen Ganzen ist ohne Kraftaufwand möglich und da nur ein Spannungszustand sich ausbilden kann, muß der des ursprünglichen Ringes und jener des zusammen gesetzten identisch sein.

Setzt man in dem Ausdrucke für ein Moment im Schnitte φ (Seite 17) $M_0 = 0$, so erhält man für den jetzigen Fall das Moment

$$M = F\gamma R^2 \frac{\pi}{2}(1 - \cos\varphi) - T_0 R \sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

die Normalkraft $N = - F\gamma R \frac{\pi}{2}\cos\varphi - T_0 \sin\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi$,

die Schubkraft $T = F\gamma R \frac{\pi}{2}\sin\varphi - T_0\cos\varphi - F\gamma R\varphi\sin\varphi$.

Für den Horizontalschnitt:

$$\text{die Schubkraft } T_0 = F\gamma R \cdot \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 + 1},$$

(die Normalkraft $N_0 = F\gamma R \frac{\pi}{2}$, das Moment $M_0 = 0$).

Für den Scheitelschnitt:

$$\text{das Moment } F\gamma R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - F\gamma R^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 + 1},$$

$$\text{die Normalkraft } - F\gamma R \cdot \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 + 1},$$

die Schubkraft 0.

1) Besonders bei den maximalen Momenten zutreffend.

Man erhält genügend genaue Werte[1]), wenn man $\frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 + 1} = 1$ setzt, also wieder diesen Einfluß der Normalkräfte unterdrückt.

Die Auflagerkräfte des ganzen Ringes sind lotrecht nach oben gerichtet und haben die Größe $F\gamma R \cdot 3{,}14159$.

Die dritte Auflagerungsart gibt die gleiche Beanspruchung wie bei gelenkartiger Lagerung, da ein Horizontalschub nicht zustande kommt.

In den Fig. 7 und 8 sind die Momente und Normalkräfte für den eingespannten und gelenkartig gelagerten Ring graphisch dargestellt.

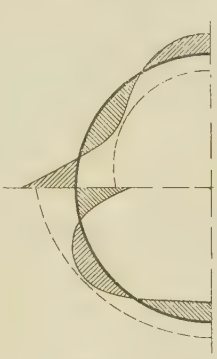


Fig. 7.

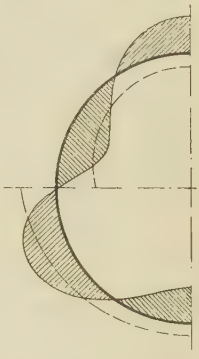


Fig. 8.

Die Momente sind in der schematischen Zeichnung des Ringes von den zugehörigen Stellen in radialer Richtung aufgetragen, und zwar vom Kreise nach außen, wenn sie positiv sind und umgekehrt, wenn negativ. Es erscheinen dabei die Momentenflächen in verzerrter Gestalt. Für den Fall der Einspannung tritt das maximale Moment im Horizontalschnitte auf, während bei gelenkartiger Lagerung das größte Moment im Schnitte $\varphi = 25^0$ zu erwarten ist.

Die Normalkräfte sind in den Figuren durch gestrichelte Linien begrenzt. Zugkräfte sind nach außen, Druckkräfte nach innen abgetragen.

Zusammenstellung der Beanspruchung.

φ^0	Einspannung		Gelenkartige Lagerung	
	Moment	Normalkraft	Moment	Normalkraft
0	+ 0,10954 $F\gamma R^2$	— 1,57080 $F\gamma R$	0	— 1,57080 $F\gamma R$
10	+ 0,02059	— 1,48610	— 0 06474 $F\gamma R^2$	— 1,46189
20	— 0,02844	— 1,36675	— 0,09028	— 1,31905
30	— 0,04633	— 1,22665	— 0,08613	— 1,15691
40	— 0,04200	— 1,07954	— 0,06190	— 0,98990
50	— 0,02431	— 0,93862	— 0,02701	— 0,83178
60	— 0,00129	— 0,81560	+ 0,00995	— 0,69482
70	+ 0,02036	— 0,72029	+ 0,04187	— 0,58924
80	+ 0,03546	— 0,66007	+ 0,06327	— 0,52272
90	+ 0,04087	— 0,63947	+ 0,07080	— 0,50000

1) Besonders bei den maximalen Momenten zutreffend.

Beanspruchung durch den radialen Polzug und durch die Temperaturspannungen.

Die Lagerung des Ringes ist unverschieblich.

Für den Polzug:

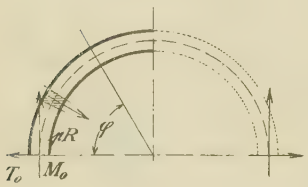


Fig. 9.

p sei die radiale Kraft für die Längeneinheit des Ringes.

Im Horizontalschnitte:

Ein Moment, eine Schubkraft und eine Normalkraft, die letztere ist gleich pR.

Im Schnitte φ ist:

das Moment $M_0 + T_0 R \sin\varphi$,

die Normalkraft $T_0 \sin\varphi - pR$,

die Schubkraft $T_0 \cos\varphi$.

Die Formänderungsarbeit:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (M_0 + T_0 R \sin\varphi)^2 \frac{R}{E\Theta} d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (T_0 \sin\varphi - pR)^2 \frac{R}{EF} d\varphi.$$

Aus

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial T_0} = 0$$

ergibt sich

für den Horizontalschnitt: $T_0 = \dfrac{pR}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 \cdot 0{,}14878 + 0{,}78540}$

oder genügend angenähert

$$T_0 = pR\left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 6{,}721, \quad M_0 = -pR^2\left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 4{,}279;$$

für den Scheitelschnitt:

das Moment $+ pR^2\left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 2{,}442$,

die Normalkraft $-pR\left(1 - \left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 6{,}721\right)$,

die Schubkraft 0.

Die Auflager üben auf den Ring einen nach außen gerichteten Horizontalschub von der Größe $2T_0$ aus.

Für die Temperaturspannungen.

Ähnlich wie beim Magnetrade findet man aus den obigen Formeln, falls T^0 Cels. den Unterschied zwischen Aufstellungs- und Betriebstemperatur des Gehäuses bedeutet, bei einer Ausdehnung des Ringes im

Horizontalschnitte: $M_0 = + \lambda TEF \cdot R \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 4{,}279$,

$N_0 = 0, \quad T_0 = - \lambda TEF \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 6{,}721.$

Im Scheitelschnitte: das Moment $-\lambda TEF \cdot R \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 2{,}442$,

die Normalkraft $-\lambda TEF \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 6{,}721$,

die Schubkraft 0.

Der Ring erfährt einen nach innen gerichteten Horizontalschub $2T_0$.

Wird *einem Auflager Verschieblichkeit* gegeben, so wird beim Polzuge der Ring nur durch Normalkräfte von der Größe $-pR$ beansprucht. Die nebenstehende Fig. 10 gibt eine Darstellung der Momente infolge Polzugbelastung bei unverschieblich gelagertem Ringe.

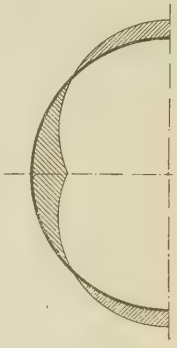


Fig. 10.

Beanspruchung durch die tangentiale Umfangskraft.

u bezeichne die Umfangskraft pro Ringeinheit.

Die Auflager sind eingespannt.

Die beiden Ringhälften sind völlig gleich beansprucht, es genügt also die Untersuchung einer derselben. An den Horizontalschnitten sind wieder Momente, Normal- und Schubkräfte einzuführen. Siehe Fig. 11.

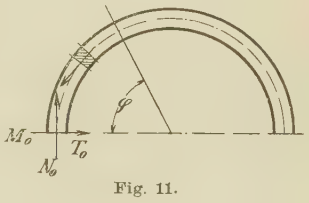


Fig. 11.

Für einen Schnitt φ ist:

das Moment

$$M_0 + N_0 R(1 - \cos\varphi) - T_0 R \sin\varphi - uR^2(\varphi - \sin\varphi),$$

die Normalkraft $-N_0 \cos\varphi - T_0 \sin\varphi + uR \sin\varphi$,

die Schubkraft $N_0 \sin\varphi - T_0 \cos\varphi - uR(1 - \cos\varphi)$.

Die Formänderungsarbeit für die Ringhälfte:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_0 + N_0 R(1 - \cos\varphi) - T_0 R \sin\varphi - uR^2(\varphi - \sin\varphi)\right)^2 \frac{R\,d\varphi}{E\Theta}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-N_0 \cos\varphi - T_0 \sin\varphi + uR \sin\varphi\right)^2 \frac{R}{EF} d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_0 + N_0 R(1 + \sin\varphi) - T_0 R \cos\varphi - uR^2\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + uR^2 \cos\varphi\right)^2 \frac{R\,d\varphi}{E\Theta}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(N_0 \sin\varphi - T_0 \cos\varphi + uR \cos\varphi\right)^2 \frac{R}{EF} d\varphi.$$

Aus den Gleichungen $\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial N_0} = 0$ und $\frac{\partial A}{\partial T_0} = 0$ findet man für den Horizontalschnitt: $M_0 = uR^2\left(1{,}57080 - 1{,}27324 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2}\right)$,

$$N_0 = uR \cdot 1{,}27324 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2},$$

$$T_0 = uR;$$

für den Scheitelschnitt:

das Moment 0, die Normalkraft 0,

die Schubkraft $-uR\left(1 - 1{,}27324 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2}\right)$;

für den Horizontalschnitt rechts:

das Moment $-uR^2\left(1{,}57080 - 1{,}27324 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2}\right)$,

die Normalkraft $+uR \cdot 1{,}27324 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2}$,

die Schubkraft $-uR$.

Die Auflager üben am Ringe lotrechte Kräfte aus, das linke einen nach oben gerichteten Druck $uR \cdot 2{,}54648 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2}$, das rechte einen nach abwärts von gleicher Größe, außerdem bewirkt jedes Auflager ein positives Moment $uR^2\left(3{,}14159 - 2{,}54648 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2}\right)$.

Gelenkartige Lagerung.

Durch die Einspannung war die Unabhängigkeit zwischen oberem und unterem Halbringe ohne weiteres klar, und es besteht auch jetzt kein Grund dagegen. Man kann sich von derselben überzeugen, wenn man die Belastung des gelenkartig gelagerten Halbringes sich aus zweien zusammengesetzt denkt, von denen die eine längs eines Viertelbogens (von einem Horizontalschnitte angefangen) wirkt (Fig. 12a), die andere ebenso, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen (Fig. 12b). Die Beanspruchungen infolge dieser Belastungen werden gleich groß, im Vorzeichen entgegengesetzt sein. Die Horizontalquerschnitte drehen sich im einen Falle um die Winkel α und β, im anderen um $-\alpha$ und $-\beta$. Wendet man nun einen dieser Halbringe mitsamt seiner Belastung derart um, daß die Mittellinie in ihrer Lage bleibt, so kann man den ursprüng

Fig. 12a.

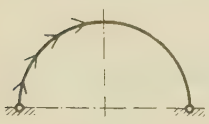


Fig. 12b.

lichen Belastungsfall durch Aufeinanderlegung der Halbringe herstellen. Die Drehung der Horizontalquerschnitte bei voller Belastung ergibt sich als Summe der Einzeldrehungen beiderseits zu $\alpha+\beta$; mit der Gleichheit derselben ist auch die Unabhängigkeit der Halbringe von einander erwiesen.

Die an einer Ringhälfte zur Wirkung kommende Umfangskraft kann durch eine horizontale Resultierende von der Größe $2uR$ ersetzt werden, jeder Horizontalschnitt hat somit die Schubkraft uR aufzunehmen. Die Normalkräfte in den genannten Schnitten ergeben sich durch Anwendung des Momentensatzes zu $uR\frac{\pi}{2}$, wobei die Ringmitte Momentenpunkt sein soll.

Für einen Schnitt φ ist:

$$\text{das Moment } uR^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi)-uR^2\varphi,$$

$$\text{die Normalkraft } -uR\frac{\pi}{2}\cos\varphi,$$

$$\text{die Schubkraft } +uR\frac{\pi}{2}\sin\varphi-uR.$$

Für den Horizontalschnitt links:

die Normalkraft $-1{,}57080\,uR$, die Schubkraft $-uR$;

für den Scheitelschnitt:

das Moment 0, die Normalkraft 0, die Schubkraft $+0{,}57080\,uR$;

für den Horizontalschnitt rechts:

die Normalkraft $+1{,}57080\,uR$, die Schubkraft $-uR$.

Die Auflager üben wieder zwei lotrechte, entgegengesetzt gerichtete Drücke von der Größe $uR\cdot 3{,}14159$ aus.

Die dritte Auflagerungsart ist hiermit ebenfalls erledigt.

Die Fig. 13 und 14 geben Darstellungen der Momente und Normalkräfte für den eingespannten und drehbar gelagerten Ring.

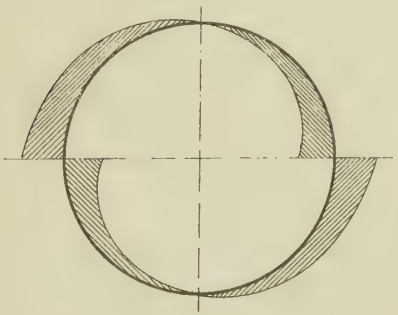


Fig. 13.

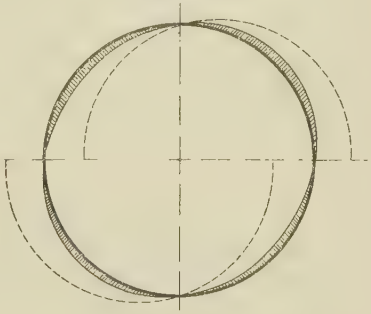


Fig. 14.

Überblickt man die bisher gefundenen Resultate, so läßt sich zunächst für den durch die Schwerkraft belasteten Ring feststellen, daß die Ein-

führung eines positiven Momentes am linken Auflager und eines negativen am rechten, in den Scheitelpartien des Ringes eine beliebige Verkleinerung der Momentenflächen eines Vorzeichens bewirkt. Die wellenartige Begrenzungslinie der Momentenflächen nähert sich im Scheitel, wenn man von Fig. 8 zu Fig. 7 übergeht, mehr dem Kreise, allerdings entfernt sie sich dafür in der Nähe der Auflager. Wird ein noch größeres Moment als das Einspannmoment ausgeübt, so wird die Momentenlinie im oberen und unteren Teile des Ringes ganz nahe an den Kreis herantreten, an den Auflagern stark abweichen.

Die beiden anderen Belastungen, die Umfangskraft und der Polzug fordern bei möglichst kleinen Momenten gelenkartige Lagerung bez. ein verschiebliches Lager.

Untersuchung des Einflusses einer seitlich außerhalb des Ringes erfolgenden Stützung.

Der Übergang von dem bisher betrachteten Ringe zur eigentlichen Ausführungsform des Gehäuses soll stufenweise erfolgen.

Der Einfluß einer nach unten geschobenen, im Schwerpunktskreise erfolgenden Stützung ist gering, solange der Abstand der durch Verbindung der Auflager erhaltenen Sehne von der Mittellinie nur bis circa $\frac{1}{5}R$ beträgt. Eine größere Veränderung des Ortes der Unterstützung in dieser Weise soll nicht berücksichtigt werden. Bei der gegebenen Belastungsart und Form des Gehäuses ist Symmetrie zu den Mittellinien geboten, sonst erreicht man für die eine Hälfte einen Vorteil und für die andere im gleichen Maße einen Nachteil.

Es sei nun ein Ring betrachtet, an dem in der horizontalen Mittellinie beiderseits ein nach außen gerichteter Arm befestigt ist, mit denen er sich auf das Fundament stützt. In der Ausführung sind diese Arme besonders stark konstruierte, kurze Vorsprünge, die mit der unteren Ringhälfte in einem Stücke gegossen sind. Diese Stützen und ihre Verbindung mit dem Ringe kann man in die Rechnung als starr einführen.

Beanspruchung durch die Schwerkraft.

Die Lagerung der Arme ermögliche nur die Übertragung einer Kraft. Der Auflagerdruck ist senkrecht[1]) und gleich $F\gamma R\pi$. Am inneren Armende, also am Ringe selbst, kommt außer der Kraft $F\gamma R\pi$ noch ein

1) Bei den für Gehäuse in Betracht kommenden Verhältnissen ist das Auftreten eines Horizontalschubes nicht zu erwarten.

Moment $F\gamma R\pi \cdot a$ zur Wirkung, wobei a den Abstand der Lagermitte vom Schwerpunktskreise bedeutet. Die Beanspruchung des Ringes ist ähnlich der auf Seite 17 gefundenen; für den Fall, daß

im Horizontalschnitte

das Moment $M_0' = F\gamma R\frac{\pi}{2}a$ ist, wird die Schubkraft

Fig. 15

$$T_0' = M_0'\frac{4}{\pi}\frac{\frac{R}{t^2}}{\left(\frac{R}{t}\right)^2+1} + \frac{1}{2}F\gamma R\frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2-1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2+1},$$

oder bei Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte

$$T_0' = F\gamma R\left(\frac{2a}{R}+0{,}500\right).$$

Die Werte für die übrigen Schnitte berechnen sich nach dem allgemeinen Ausdrucke für Moment, Normalkraft und Schubkraft im Schnitte φ Seite 17; an Stelle von M_0, T_0 tritt M_0' und T_0'.

Durch die Veränderung von a kann man beliebige positive bez. negative Momente (für linkes und rechtes Auflager) erzeugen. Es soll nun die Größe des Hebelarmes berechnet werden, die das Einspannmoment $2M_0$ hervorbringt, für M_0 sei der Näherungswert $F\gamma R^2 \cdot 0{,}11$ gesetzt. (Siehe Seite 18.)

$$F\gamma R\pi \cdot a = F\gamma R^2 \cdot 0{,}22;\quad a = 0{,}07R \text{ oder rund } \frac{1}{14}R.$$

Dieser Abstand fällt mit dem der Innenkante der Stützfläche vom Schwerpunktskreise bei den üblichen praktischen Ausführungen zusammen.

Man kann noch auf eine zweite Art das im Ringe zur Wirkung kommende Moment verändern, indem man in die Arme außer der Einzelkraft noch ein Moment (positiv oder negativ) einleitet.

Fig. 16.

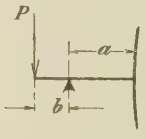


Fig. 17.

In Fig. 16 und 17 ist dies ausgeführt. Das Moment am Ringe ist dann: $2M_0' = F\gamma R\pi \cdot a \pm Pb$.

Im Horizontalschnitte:

das Moment $M_0' = \frac{F\gamma R\pi \cdot a \pm Pb}{2}$,

die Normalkraft $N_0' = F\gamma R\frac{\pi}{2}$,

die Schubkraft $T_0' = M_0'\frac{4}{\pi}\frac{\frac{R}{t^2}}{\left(\frac{R}{t}\right)^2+1} + \frac{1}{2}F\gamma R\frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2-1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2+1}$.

Für den Fall, daß $F\gamma R\pi \cdot a - Pb = 0$ ist, hat man im Ringe eine Beanspruchung, wie sie in Fig. 8 dargestellt war.

Zur einfacheren Berechnung der Momente und Normalkräfte diene folgende Tabelle.

φ in Grad.	φ im Bogenm.	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\frac{\pi}{2}\cdot\sin\varphi$	$\frac{\pi}{2}\cdot\cos\varphi$	$\varphi\cos\varphi$
0	0	0	1	0	1,57080	0
10	0,17453	0,17365	0,98481	0,27277	1,54694	0,17188
20	0,34907	0,34202	0,93969	0,53724	1,47607	0,32803
30	0,52360	0,50000	0,86603	0,78540	1,36036	0,45345
40	0,69813	0,64279	0,76604	1,00970	1,20330	0,53480
50	0,87267	0,76604	0,64279	1,20330	1,00970	0,56094
60	1,04720	0,86603	0,50000	1,36036	0,78540	0,52360
70	1,22173	0,93969	0,34202	1,47607	0,53725	0,41786
80	1,39626	0,98481	0,17365	1,54694	0,27277	0,24246
90	1,57080	1	0	1,57080	0	0

φ in Grad.	$1-\cos\varphi$	$\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi)$	$\sin\varphi-\varphi\cos\varphi$	$\cos\alpha-\cos\varphi$	$\sin\varphi-\sin\alpha$
0	0	0	0	—	—
10	0,01159	0,02386	0,00177	—	—
20	0,06031	0,09473	0,01400	—	—
30	0,13396	0,21042	0,04655	0	0
40	0,23395	0,36749	0,10799	0,09999	0,14279
50	0,35721	0,56111	0,20510	0,22324	0,26604
60	0,50000	0,78540	0,34243	0,36603	0,36603
70	0,65798	1,03355	0,52183	0,52401	0,43969
80	0,82635	1,29803	0,74235	0,69238	0,48481
90	1	1,57080	1	0,86603	0,50000

Beanspruchung durch die Umfangskraft.

Für *gelenkartige Lagerung* ergibt sich ein Auflagerdruck $uR\pi\,\frac{R}{R+a}$,

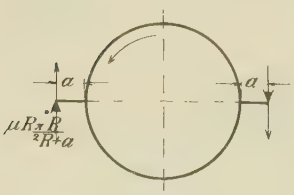


Fig. 18.

am Ringe ist das Moment $uR\pi\,\frac{R}{R+a}\cdot a$.

Im Horizontalschnitte ist

das Moment $M_0' = uR\,\frac{\pi}{2}\,\frac{R}{R+a}\cdot a$,

die Normalkraft $N_0' = uR\,\frac{\pi}{2}\,\frac{R}{R+a}$

die Schubkraft $T_0' = uR$.

Nach dem allgemeinen Ausdrucke für Moment, Normalkraft und Schubkraft im Schnitte φ (Seite 21) lassen sich diese Größen für beliebige Schnitte berechnen.

Werden auf die Stützen auch noch Momente ausgeübt, so hat man im Horizontalschnitte

ein Moment $M_0' = uR\frac{\pi}{2}\frac{R}{R+a}\cdot a \pm Pb$, Normalkraft und Schubkraft wie vorher.

Die Beanspruchung infolge der Temperaturspannungen und des Polzuges wird durch Anbringung der Stützen nicht beeinflußt.

Die seitliche Stützung ändert also im Wesen der Beanspruchung nichts, sie bietet vielmehr das Mittel, die früher untersuchten Fälle zu verwirklichen.

Um bei der Befestigung des Gehäuses am Fundamente nicht unbeabsichtigte Momente hervorzurufen, soll die Auflagerung völlig klar sein. Die Erzeugung der Stützenmomente ist durch den Auflagerdruck zu bewirken, der in eindeutiger Weise in die Arme einzuführen ist (Berührung in einer schmalen Leiste). Die Schrauben, welche noch angeordnet sind, sollen keine Momente ausüben. Die Anbringung derselben in der Unterstützungslinie ist daher am besten.

Das Gehäuse darf nun auch im belasteten Zustande nur unmerklich von der Kreisform abweichen. Bezüglich der Größe der Formänderungen sollen daher die verschiedenen Beanspruchungen geprüft werden.

Ohne Rechnungen über Formänderungen angestellt zu haben, kann man feststellen, da positive Momente eine Verkleinerung der Krümmung und negative eine Vergrößerung derselben zur Folge haben, daß die Schwerkraftbeanspruchung bei Einführung des Stützenmomentes Null die größten Formänderungen erwarten läßt. Am oberen Halbringe bewegt sich der Scheitel nach innen, die seitlichen Ringteile nach außen, am unteren Halbringe umgekehrt. Die Einspannmomente verringern diese Formänderung; sehr große Momente desselben Vorzeichens bringen sogar die entgegengesetzte Wirkung hervor. Der Ring erfährt infolge der Drehung der Horizontalquerschnitte eine Hebung bez. Senkung in lotrechter Richtung, ausgenommen bei Einführung des Einspannmomentes; diese Bewegungen können aber jederzeit durch entsprechendes Nachstellen des Ringes beseitigt werden.

Bei Temperaturspannungen kommen nur verschiebliche und unverschiebliche Lagerung in Betracht. Im ersteren Falle sind die Spannungen Null, der Ring dehnt sich gleichmäßig aus, im zweiten Falle wird diese Bewegung an den Auflagern verhindert, die Ausbiegung in den Scheiteln wird noch größer als die Verschiebung bei gleichartiger Erweiterung.

Die Einführung des Einspannmomentes und verschiebliche Lagerung

würde also die Kreisform am wenigsten stören; infolge der Notwendigkeit ein Lager festzuhalten, tritt aber eine Exzentrizität zwischen Magnetrad- und Gehäusemitte ein, die bei den Formänderungen durch die Erwärmung des Ringes sehr erheblich ist.

Die unverschiebliche Lagerung vermeidet dies, das Gehäuse selbst wird aber dabei deformiert.

Die magnetischen Kräfte sind in beiden Fällen nicht mehr an allen Stellen gleich, z. B. bei unverschieblicher Lagerung, die den bisherigen praktischen Ausführungen entspricht, sind sie bei den Auflagern am größten und nehmen gegen den Scheitel zu ab.

Ableitung der Ausdrücke für die Formänderung des Ringes bei Belastung durch die Schwerkraft.

Fig. 19 stellt wieder den zur Betrachtung nötigen Gehäuseteil dar. An der Stelle φ sei ein Element ins Auge gefaßt, es soll durch ein Moment M beansprucht werden. Seine Endquerschnitte drehen sich dann um den Winkel $\Delta d\varphi$ gegen einander. Das ganze Ringstück links von φ wird, wenn man sich den Quadranten bei A zunächst festgehalten denkt, bei B dagegen frei beweglich, um denselben Winkel eine Drehung ausführen; der Schwerpunkt des Elementes ist dabei Drehpunkt. Das Ende B macht einen Weg $r\Delta d\varphi$, wenn r die Sehne des sich bewegenden Bogenstückes bezeichnet.

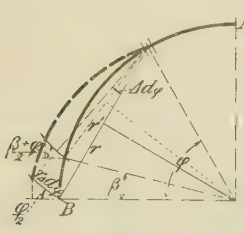


Fig. 19.

Die Verschiebungswege sollen nun immer auf eine vertikale und horizontale Richtung projiziert und mit positiven Vorzeichen versehen werden, wenn sie lotrecht nach unten und horizontal nach rechts (nach dem Gehäusemittelpunkte) gerichtet sind. Für den Punkt B sind die Wegkomponenten:

$$\text{Horizontal } -r\Delta d\varphi \cos\frac{\varphi}{2}, \quad \text{vertikal } -r\Delta d\varphi \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Für eine durch den Winkel β gekennzeichnete Stelle auf dem Schwerpunktskreise des Ringes erhält man:

$$\text{Horizontal } -r'\Delta d\varphi \cos\frac{\beta+\varphi}{2} \text{ und vertikal } -r'\Delta d\varphi \sin\frac{\beta+\varphi}{2}.$$

Tatsächlich besteht nun die Festhaltung des Ringes an der Stelle A nicht, sondern es bleibt nur die Tangente an die Stabmittellinie im Scheitel in ihrer Richtung unverändert; die Lage des Punktes A wird dagegen durch die Bedingung, daß das Ende B auf der horizontalen Mittellinie bleiben

muß, gegeben. Um dies zu berücksichtigen, muß man den ganzen Quadranten um das Stück $r \Delta d\varphi \sin \frac{\varphi}{2}$ in lotrechter Richtung verschieben.

Für $r = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$, $r' = 2R \sin \frac{\varphi - \beta}{2}$, $\Delta d\varphi = \frac{M}{E\Theta} R d\varphi$ gesetzt und die Verbiegung des ganzen Quadranten durch Momente in Betracht gezogen, gibt als wirkliche Verschiebung einer Stelle β in:

Vertikaler Richtung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{E\Theta} R^2 (1 - \cos\varphi)\, d\varphi - \int_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{E\Theta} R^2 (\cos\beta - \cos\varphi)\, d\varphi;$$

horizontaler Richtung

$$- \int_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{E\Theta} R^2 (\sin\varphi - \sin\beta)\, d\varphi,$$

wobei für M der Wert

$$M_0' + F\gamma R^2 \frac{\pi}{2} (1 - \cos\varphi) - T_0' R \sin\varphi - F\gamma R^2 (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi)$$

einzusetzen ist. (Siehe Seite 17 und 25.)

Die allgemeine Ausrechnung ergibt ziemlich lange, unpraktische Formeln, die besser hier nicht aufgenommen werden. Besonders wichtig ist auch nur die Kenntnis der größten Durchbiegungen und da diese im Scheitel und ungefähr bei $\varphi = 30^0$ zu erwarten sind, so sollen obige Ausdrücke für die beiden Stellen noch ganz durchgerechnet angegeben werden.

Senkung des Scheitels:

$$(M_0' \cdot 0{,}57080 + F\gamma R^2 \cdot 0{,}26345 - T_0' R \cdot 0{,}50000) \frac{R^2}{E\Theta}.$$

Verschiebung der Stelle $\varphi = 30^0$:
in vertikaler Richtung

$$(M_0' \cdot 0{,}16389 + F\gamma R^2 \cdot 0{,}06091 - T_0' R \cdot 0{,}12500) \frac{R^2}{E\Theta},$$

in horizontaler Richtung

$$(- M_0' \cdot 0{,}34243 - F\gamma R^2 \cdot 0{,}16286 + T_0' R \cdot 0{,}30709) \frac{R^2}{E\Theta}.$$

Für den Fall, daß ein *Auflagermoment von der Größe des Einspannmomentes* ausgeübt wird, ist

die Scheitelsenkung: $+ 0{,}00624\, F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta}$;

die Verschiebung der Stelle $\varphi = 30^0$:

$$\text{vertikal} \quad -0{,}00106\, F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} \text{ (Hebung)},$$

$$\text{horizontal} \quad -0{,}00400\, F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} \text{ (nach außen)}.$$

Für den Fall *gelenkartiger Lagerung* also Auflagermoment gleich Null, ist

$$\text{die Scheitelsenkung:} \quad +0{,}01345 F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta};$$

die Verschiebung der Stelle $\varphi = 30^0$:

$$\text{vertikal} \quad -0{,}00157\, F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta},$$

$$\text{horizontal} \quad -0{,}00931\, F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta}.$$

Die Formänderungen sind also im zweiten Falle fast doppelt so groß als im ersten.

Bei Aufstellung dieser Formeln wurde nur der Einfluß der Biegungsmomente auf die Formänderung berücksichtigt; infolge der Verlängerung oder Verkürzung des Bogens durch die Normalkräfte ergeben sich noch nachstehende Verschiebungen, die zu den vorher gefundenen entsprechend zu addieren sind.

$$\text{Verschiebung des Scheitels:} \quad -\int_0^{\frac{\pi}{2}} N \frac{R}{EF} \cos\varphi \, d\varphi.$$

Verschiebung einer Stelle $\varphi = \beta$:

$$\text{vertikal} \quad -\int_0^{\beta} N \frac{R}{EF} \cos\varphi \, d\varphi; \quad \text{horizontal} \quad -\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} N \frac{R}{EF} \sin\varphi \, d\varphi.$$

Für N der Wert $-F\gamma R \frac{\pi}{2} \cos\varphi - T_0' \sin\varphi + F\gamma R\varphi \cos\varphi$ eingesetzt, gibt:

Verschiebung des Scheitels: $(F\gamma R \cdot 0{,}86685 + T_0 \cdot 0{,}50000) \frac{R}{EF}$.

Verschiebung der Stelle $\varphi = 30^0$:

$$\text{vertikal} \quad (F\gamma R \cdot 0{,}63193 + T_0 \cdot 0{,}12500) \frac{R}{EF},$$

$$\text{horizontal} \quad (F\gamma R \cdot 0{,}23916 + T_0 \cdot 0{,}74011) \frac{R}{EF}.$$

Bei seitlicher Stützung bewegt sich der ganze Ring in lotrechter Richtung um: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{E\Theta} R d\varphi \cdot a$; für M der Wert eingesetzt:

$$(M_0' \cdot 1{,}57080 + F\gamma R^2 \cdot 0{,}46740 - T_0 R) \frac{R}{E\Theta} \cdot a.$$

Ausdrücke für die Formänderung des Ringes infolge einer Erwärmung um T^0 Cels.

Verschiebliche Lagerung.

Radialverschiebung überall gleich $R\lambda T\left(\lambda = \frac{1}{80000} \text{ für Eisen}\right)$.

Unverschiebliche Lagerung.

Scheitelverschiebung: $-R\lambda T - T_0 R\frac{R^2}{E\Theta}\cdot 0{,}13662 + T_0\frac{R}{EF}\cdot 0{,}50000.$

Verschiebung der Stelle $\varphi = 30^0$:

vertikal $-R\lambda T\cdot 0{,}50000 - T_0 R\frac{R^2}{E\Theta}\cdot 0{,}02066 + T_0\frac{R}{EF}\cdot 0{,}12500,$

horizontal $-R\lambda T\cdot 0{,}86603 + T_0 R\frac{R^2}{E\Theta}\cdot 0{,}08909 + T_0\frac{R}{EF}\cdot 0{,}74011.$

Die Glieder $T_0\frac{R}{EF}$ sind unbedeutend und können vernachlässigt werden.

II.

Um die **Wirkungen der Schwerkraft** zu beseitigen, werden am aufgestellten Gehäuseringe an den Stellen großer Durchbiegungen Stangen befestigt, die mit dem Fundamente oder auch mit anderen Ringteilen, von wesentlich verschiedener Verschiebungsrichtung, verbunden werden. Durch Anspannen der Stangen wird die Form des Gehäuses solange verändert, bis der Abstand zwischen Gehäuse und Induktor überall möglichst gleich ist.

Soll nun ein derartiges Gehäuse rechnerisch untersucht werden, müssen außer den Bedingungen für die Auflagerung auch jene für die Erzeugung der Versteifung klar gegeben sein, so daß man z. B. bei Wiederholung der Aufstellung stets den gleichen Spannungszustand im Ringe herstellen kann.

Bezüglich der Auflagerung sei auf den vorigen Abschnitt, Seite 24 bis 27 verwiesen, und mit Rücksicht darauf soll das Gehäuse von nun ab in der horizontalen Mittellinie im Schwerpunktskreise gestützt betrachtet werden, dabei sollen zwei spezielle Fälle der Stützung, nämlich Einspannung und gelenkartige Lagerung, den Einfluß von Stützenmomenten darlegen.

Die Versteifung läßt sich nach obiger Aufstellungsmethode nur dann in gewünschter Weise durchführen, wenn die willkürlichen Spannungen, die durch den Monteur verursacht werden, vermieden sind. Die Ausführung und die Rechnung, welche sich an die Bedingung knüpfen, daß der Ring eine möglichst geringe Formänderung erfährt, ist aber sehr umständlich und mühevoll.

Es wird nun hier eine Annahme für die Herstellung der Versteifung gemacht und die Rechnungen dementsprechend durchgeführt, nachträglich wird sich zeigen, daß dieselbe völlig zulässig ist.

Die Stäbe, welche zur Versteifung dienen, sollen am aufgestellten Gehäusering so stark angespannt werden, bis sie genau die Länge haben welche dafür die Konstruktionszeichnung angibt. In anderer Weise ausgedrückt, sollen die Endpunkte der Stäbe vor und nach der Belastung durch die Schwerkraft den nämlichen Abstand haben; man kann sich diese Stäbe also auch als starr denken. Durch das Einsetzen derselben werden, wenn eine Verbindung mit dem Fundamente erfolgte, die Versteifungspunkte ganz bez. nur in der Richtung der Stäbe festgehalten oder es wird, wenn die Stäbe Punkte des Ringes mit einander verbinden, ein selbständiges Fachwerk mit starren Füllungstäben gebildet; in allen Fällen wird erreicht, daß die Versteifungspunkte auf dem ursprünglichen Kreise — von sehr kleinen Verschiebungen abgesehen — festgehalten sind.

Die Kräfte, welche an den Versteifungspunkten ausgeübt werden, sollen Versteifungskräfte heißen, dieselben können natürlich die Stäbe in Zug oder Druck versetzen.

Um das Auftreten von Druck in einzelnen Stäben zu vermeiden, wird nötigenfalls noch ein zweites, besonders erzeugtes, Kräftesystem am Gehäuse eingeführt. Dasselbe hat mit der Versteifung im vorher genannten Sinne nichts zu thun, an späterer Stelle wird darüber gesprochen, vorläufig möge diese Bemerkung nur zur Vermeidung einer unrichtigen Auffassung dienen.

1) Gehäuse, welche in sich verspannt sind. (Spannwerkgehäuse.)

Hierher gehören die meisten Ausführungen. Es sind nur zwei wichtige Typen vorhanden, die beide die Punkte I, II, III, I′, II′, III′ als Versteifungspunkte benützen. (Siehe Fig. 20.)

Fig. 20.

I, II und I′, II′ befinden sich im Abstande $\frac{R}{2}$ von der horizontalen Mittellinie, III′ und III im oberen und unteren Ringscheitel. In diesen Punkten erfolgen ziemlich genau die größten Durchbiegungen.

Die Dreieckversteifung.

Die Punkte I, II, III und I′, II′, III′ sind durch je ein gleichseitiges Dreieck[1]) verbunden. Die zusammengehörigen Punkte liegen auf

1) In der Ausführung sind es in zwei parallelen lotrechten Ebenen liegende Dreiecke. Bei der Rechnung kann man sich dieselben in der vertikalen Mittelebene des Gehäuses vereinigt denken. Die tatsächliche Spannung einer Stange ergibt sich als die Hälfte der in der Rechnung gefundenen.

Kreisen, die auch bei der Formänderung wieder in einen zusammenfallen, da die Beanspruchung der oberen und unteren Ringhälfte der Größe nach gleich ist. Von dem letzteren kann man sich überzeugen, wenn man sich zwei Halbringe mit der in Fig. 21 angegebenen Versteifung durch die Schwerkraft belastet denkt. Die Beanspruchung der beiden unterscheidet sich dann nur im Vorzeichen. Legt man diese Halbringe ohne vorherige Drehung auf einander, daß die Mittellinien und die Mittelpunkte sich decken, so erhält man das Gehäuse mit Dreieckversteifung belastet durch die Schwerkraft; der vertikale Versteifungsstab wird spannungslos und kann weggenommen werden. Der durch alle sechs Punkte gehende Kreis fällt ferner in großer Annäherung mit der Mittellinie des spannungslosen Gehäuseringes zusammen — tatsächlich verschieben sich die Versteifungsstellen etwas in lotrechter Richtung.

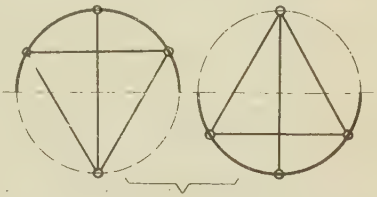


Fig. 21.

Aus der Anordnung der Versteifungsstäbe und aus symmetrischen Beziehungen zwischen oberem und unterem Gehäuseteile folgt, daß das Dreieck I, II, III gezogen und I′ II′ III′ gedrückt ist. In Fig. 22 stellt der ausgezogene Quadrant den Teil dar, auf welchen sich die Betrachtung beschränkt. Die seitliche Versteifungskraft wird in eine vertikale Komponente X und in eine horizontale Y zerlegt; am Versteifungspunkte im Scheitel wirkt die Kraft $2X$, auf den linken Quadranten trifft der Anteil X.

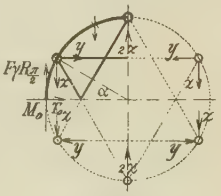


Fig. 22.

Am Ringe das Einspannmoment ausgeübt.

Im Horizontalschnitte das Moment M_0, die Schubkraft T_0 bezeichnet, die Normalkraft ist $F\gamma R\frac{\pi}{2}$.

Im Schnitte φ ist:

das Moment $M = M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi -$

$$- F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - [XR(\cos\alpha - \cos\varphi) + YR(\sin\varphi - \sin\alpha)]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}},$$

die Normalkraft $N = -T_0\sin\varphi - F\gamma R\frac{\pi}{2}\cos\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi$

$$+ [X\cos\varphi - Y\sin\varphi]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Die Formänderungsarbeit in diesem Quadranten:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$

$$- XR(\cos\alpha - \cos\varphi) - YR(\sin\varphi - \sin\alpha)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi.$$

Der Einfluß der Normalkräfte auf die Formänderung kann von nun an nicht mehr angegeben werden. Die Rechnungen sind in den meisten Fällen sehr langwierig und führen, falls das Ziel erreicht wird, zu unförmlichen Resultaten. Für die praktische Berechnung hat diese Lücke keine Bedeutung, denn durch die unvermeidlichen kleinen Ausführungsfehler an den Bedingungen der Auflagerung und Versteifung werden Schwankungen in der Beanspruchung hervorgerufen, die an Größe jener genannten Vernachlässigung sicher gleichkommen.

Aus den Gleichungen $\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial T_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial Y} = 0$ ergibt sich im Horizontalschnitte:

$$M_0 = +F\gamma R^2\cdot 0{,}02968,\quad T_0 = F\gamma R\cdot 0{,}35268,\quad X = F\gamma R\cdot 0{,}06841,$$
$$Y = F\gamma R\cdot 0{,}38991.$$

Vom linken Auflager wird am Ringe ein Moment $+F\gamma R^2\cdot 0{,}05936$ ausgeübt, der lotrechte Auflagerdruck ist: $F\gamma R\cdot 3{,}14159$.

Stabkräfte:

Stab I—II $F\gamma R\cdot 0{,}35041$ Zug, Stab I′—II′ $F\gamma R\cdot 0{,}35041$ Druck,

„ I—III, „ II—III $F\gamma R\cdot 0{,}07900$ Zug, „ I′—III′, „ II′—III′ $F\gamma R\cdot 0{,}07900$ Druck.

Gelenkartige Lagerung.

Im Horizontalschnitte ist die Normalkraft $F\gamma R\frac{\pi}{2}$, die Schubkraft T_0.

Im Schnitte φ ist:

das Moment $M = F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$

$$- [XR(\cos\alpha - \cos\varphi) + YR(\sin\varphi - \sin\alpha)]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}};$$

die Normalkraft $N = -T_0\sin\varphi - F\gamma R\frac{\pi}{2}\cos\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi$

$$+ [X\cos\varphi - Y\sin\varphi]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Aus den Bedingungen, daß die Verschiebungen der Angriffspunkte der Kräfte T_0, X und Y Null sind, ergibt sich:

$$T_0 = F\gamma R \cdot 0{,}27640,\quad X = F\gamma R \cdot 0{,}04715,\quad Y = F\gamma R \cdot 0{,}51404.$$

Der Auflagerdruck am Ringe ist lotrecht und gleich $F\gamma R \cdot 3{,}14159$.

Stabkräfte:

Stab I—II $F\gamma R \cdot 0{,}48682$ Zug, Stab I—II $F\gamma R \cdot 0{,}48682$ Druck,

„ I—III, „ II—III $F\gamma R \cdot 0{,}05450$ Zug, „ I—III, „ II—III $F\gamma R \cdot 0{,}05450$ Druck.

In Fig. 23 und 24 (Tafel) ist die Beanspruchung für beide Fälle: Einspannmoment am Ringe eingeführt und kein Auflagermoment ausgeübt, dargestellt. Die Momente und Normalkräfte sind, nicht mehr wie früher von einem Kreise in radialer Richtung abgetragen, sondern um die Verzerrung zu vermeiden, senkrecht zu einer geraden Basislinie eingezeichnet. Für alle folgenden Darstellungen ist der Maßstab

der Momente 1 mm $= 0{,}002\ F\gamma R^2$ und jener

der Normalkräfte 1 mm $= 0{,}152\ F\gamma R$.

Positive Momente und Normalkräfte sind von der Basislinie nach oben abgetragen. Jeder Quadrant ist in neun gleiche Teile zerlegt und für die durch die Teilpunkte bestimmten Ringquerschnitte Moment und Normalkraft berechnet.

Zusammenstellung der Resultate.

φ in Graden	Einspannung		φ in Graden	Gelenkartige Lagerung	
	Moment	Normalkraft		Moment	Normalkraft
0	$+ 0{,}02968\ F\gamma R^2$	$- 1{,}57080\ F\gamma R$	0	0	$- 1{,}57080\ F\gamma R$
10	$- 0{,}00946$	$- 1{,}43630$	10	$- 0{,}02590\ F\gamma R^2$	$- 1{,}42306$
20	$- 0{,}01021$	$- 1{,}26866$	20	$- 0{,}01380$	$- 1{,}24257$
30	$+ 0{,}01723$	$- 1{,}21896$	30	$+ 0{,}02569$	$- 1{,}26130$
40	$- 0{,}00003$	$- 1{,}09343$	40	$+ 0{,}00373$	$- 1{,}14058$
50	$- 0{,}00341$	$- 0{,}97365$	50	$- 0{,}00299$	$- 1{,}02396$
60	$- 0{,}00054$	$- 0{,}87069$	60	$- 0{,}00181$	$- 0{,}92276$
70	$+ 0{,}00270$	$- 0{,}79379$	70	$+ 0{,}00126$	$- 0{,}84603$
80	$+ 0{,}00165$	$- 0{,}74974$	80	$+ 0{,}00163$	$- 0{,}80055$
90	$- 0{,}00641$	$- 0{,}74259$	90	$- 0{,}00335$	$- 0{,}79044$

Die Radialversteifung.

Die sechs Versteifungspunkte sind durch Stangen mit der Mitte verbunden. Die am Eingange des vorigen Abschnittes gemachten Bemerkungen gelten hier wieder; die Versteifungskräfte sind gleich, ihre Größe sei $2X$, die seitlichen in vertikale Komponenten X und in horizontale

$nX = 1{,}73205\,X$ zerlegt. Für den Fall, daß *im Horizontalschnitte ein Einspannmoment* zur Wirkung kommt, ist im Schnitte φ:

das Moment

$$M = M_0 + F\gamma R^2 \frac{\pi}{2}(1 - \cos\varphi) - T_0 R \sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - [XR(\cos\alpha - \cos\varphi) + nXR(\sin\varphi - \sin\alpha)]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}},$$

die Normalkraft

$$N = -T_0 \sin\varphi - F\gamma R \frac{\pi}{2}\cos\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi + [X\cos\varphi - nX\sin\varphi]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Die Formänderungsarbeit:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\Big)^2 \frac{R}{E\Theta}d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - XR(\cos\alpha - \cos\varphi) - nXR(\sin\varphi - \sin\alpha)\Big)^2 \frac{R}{E\Theta}d\varphi.$$

Aus $\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial T_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$ ergibt sich

$$M_0 = +F\gamma R^2 \cdot 0{,}03669,\quad T_0 = F\gamma R \cdot 0{,}38493,$$
$$X = F\gamma R \cdot 0{,}14012.$$

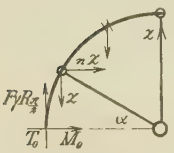


Fig. 26.

Die linke Stütze hat ein Moment $F\gamma R^2 \cdot 0{,}07338$ am Ringe auszuüben, der Auflagerdruck ist $F\gamma R \cdot 3{,}14159$. Die Beanspruchung ist in Fig. 25 (Tafel) graphisch dargestellt.

Zusammenstellung der Beanspruchung.

φ^0	Moment	Normalkraft
0	$+ 0{,}03669\,F\gamma R^2$	$- 1{,}57080\,F\gamma R$
10	$- 0{,}00806$	$- 1{,}44190$
20	$- 0{,}01423$	$- 1{,}27969$
30	$+ 0{,}00809$	$- 1{,}09938$
40	$+ 0{,}00011$	$- 0{,}96459$
50	$+ 0{,}00098$	$- 0{,}83947$
60	$+ 0{,}00718$	$- 0{,}73528$
79	$+ 0{,}00657$	$- 0{,}66123$
80	$- 0{,}00139$	$- 0{,}62406$
90	$- 0{,}02014$	$- 0{,}62762$

Die Momentenfläche ist, wie man aus der Fig. 25 ersieht, gegenüber jener bei Dreieckversteifung an der Stelle $\varphi = 30^0$ etwas verändert. Die Versteifungspunkte führen kleine Verschiebungen aus, z. B. bewegt sich Punkt I etwas nach außen abwärts, während der Punkt III′ eine kleine Hebung erfährt. Diese Formänderungen wurden rechnerisch bestimmt, sie sind aber so gering $\left(\text{höchstens } 0{,}00020\,F\gamma R^2\frac{R^2}{E\Theta}\right)$, daß die Ungenauigkeiten der Rechnung, welche durch Summation bis $0{,}0001\,F\gamma R^2\frac{R^2}{E\Theta}$ reichen können, diese Werte sehr unsicher machen; eine Wiedergabe der

Resultate dürfte daher zwecklos sein. Es wurde auch zeichnerisch durch Ermittelung der Verschiebung des Mittelpunktes, die nur in lotrechter Richtung erfolgen kann, das Vorhandensein solcher Fehler festgestellt.

Für diesen Fall ist es nützlich, noch in Fig. 25 die Momentenfläche infolge der Schwerkräfte und der Versteifungskräfte einzutragen. Die erstere ist bereits bekannt (siehe Seite 19), die schwach ausgezogene Linie begrenzt dieselbe. Für die Ermittelung der Momente der Versteifungskräfte ist noch eine besondere Rechnung nötig.

Die Hauptresultate derselben sind (Bezeichnungen siehe Fig. 27):

$$M_0 = -PR \cdot 0{,}51989,$$

$T_0 = -P \cdot 1{,}81664$ (entgegengesetzt dem in der Zeichnung eingetragenen Pfeile),

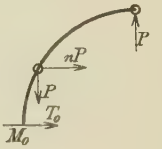


Fig. 27.

für $P = X = F\gamma R \cdot 0{,}14012$ ist

$$M_0 = -F\gamma R^2 \cdot 0{,}07285, \quad T_0 = -F\gamma R \cdot 0{,}25455.$$

Die Momente sind durch die schwach gestrichelte Kurve in Fig. 25 dargestellt.

Ermittelt man aus diesen beiden Momentenflächen die Resultierende, so erhält man die stark ausgezogene Kurve, wodurch eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung gewonnen ist.

Die die Punkte I′, II′, III′ verbindenden Stäbe erfahren bei beiden Versteifungsarten eine Druckbeanspruchung. In der praktischen Ausführung kommen aber nur Zugstäbe zur Anwendung. Um dies zu erreichen, wird zu dem bisher untersuchten Belastungsfalle: Gehäuse mit zwei Dreiecken oder radialen Stangen versteift und durch die Schwerkraft beansprucht, ein zweiter gefügt, der durch Verkürzen der Versteifungsstäbe hervorgerufen wird. Nach dem Superpositionsgesetze kann man die beiden Belastungsfälle getrennt behandeln. Der erste ist bereits bekannt, es bleibt nur noch die Erledigung des zweiten. Die Gesamtbeanspruchung ergibt sich durch Addition der Kräfte und Momente, die durch die Teilbelastungen hervorgerufen werden.

Die Verspannung.

Hier kommen mit Rücksicht auf die Haupteigenschaft der Gehäuse: die Kreisform und auf die Ausführbarkeit — im Sinne der Herstellung eines bestimmten Zustandes — nur radiale, gleich große Spannkräfte in Betracht; denn in diesem Falle hat man wieder bei der Aufstellung die praktische Bedingung die Stangen auf gleiche Größe einzustellen. Der frühere Zusatz, daß die Länge aus der Konstruktionszeichnung zu ent-

nehmen ist, fällt jetzt fort, es werden die Stangen jenem Maße gegenüber etwas verkürzt. Als neue Forderung tritt aber hinzu, daß *die Auflagerung* wenigstens *während der Verspannung verschieblich* sein muß, die Verbindungsschrauben der Stützen mit dem Fundamente sind dabei zu lösen, kurz das Auftreten eines Horizontalschubes ist zu vermeiden.

Fig. 28.

Ring durch gleich große nach der Ringmitte gerichtete Kräfte S an den Punkten I, II, III, I′, II′, III′ beansprucht.

Zur Betrachtung genügt ein Ringzwölftel (in Fig. 28 stärker ausgezogen).

Im Schnitte $\varphi = 0$ sei das Moment M_0, die Normalkraft ist S, eine Schubkraft ist aus Symmetriegründen ausgeschlossen.

In einem beliebigen Schnitte φ ist:

$$\text{das Moment } M = M_0 + SR(1 - \cos\varphi),$$
$$\text{die Normalkraft } N = -SR\cos\varphi.$$

Die Formänderungsarbeit in diesem Ringteile:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (M_0 + SR(1-\cos\varphi))^2 \frac{R}{E\Theta}\, d\varphi; \quad \frac{\partial A}{\partial M_0} = 0.$$

$$M_0 = -SR \cdot 0{,}04507.$$

Im Schnitte $\varphi = \frac{\pi}{6}$: das Moment $+ SR \cdot 0{,}08890$,

die Normalkraft $- SR \cdot 0{,}86603$.

φ^0	Moment	Normalkraft
0	$- 0{,}04507 \cdot SR$	$- S$
10	$- 0{,}02988 \cdot SR$	$- 0{,}98481 \cdot S$
20	$+ 0{,}01524 \cdot SR$	$- 0{,}93969 \cdot S$
30	$+ 0{,}08889 \cdot SR$	$- 0{,}86603 \cdot S$.

Stangenspannung: $S \cdot 0{,}57735$ bei Dreieck-Verspannung,

S bei Radial-Verspannung.

Formänderungen infolge der radialen Spannkräfte.

Radialverschiebung:

der Stelle $\varphi = 0^0$, $- S\left(R\frac{R^2}{E\Theta} \cdot 0{,}00148 - \frac{R}{EF} \cdot 0{,}953\right)$ nach außen,

der Stelle $\varphi = 30^0$, $S\left(R\frac{R^2}{E\Theta} \cdot 0{,}00169 + \frac{R}{EF} \cdot 0{,}956\right)$ nach innen.

Die Verspannung bei fest gehaltenen Lagern wickelt sich in der Ausführung nicht so einfach ab; der dabei auftretende Horizontalschub

bringt eine Störung der gleichartigen Formänderung hervor, welche durch geeignete Wahl der Spannkräfte wieder in der Hauptsache beseitigt werden muß. Vorteile sind keine vorhanden, im Gegenteil, man erreicht nur eine unnütze Erschwerung des Ganzen.

Das Dreieck- und Radial-Spannwerkgehäuse in einem bestimmten Falle der Verspannung.

Um die Beanspruchung des Dreiecks- bez. Radial-Spannwerkgehäuses zu veranschaulichen, seien sie für die Annahme durchgerechnet, daß infolge der Verspannung gerade keine Stange mehr eine Druckkraft erfährt. *Vom Auflager wird das Einspannmoment ausgeübt.*

(Damit die nachfolgenden Angaben für eine Schätzung noch geeigneter werden, sei erinnert, daß $F\gamma R 2\pi$ das Gesamtgewicht des Gehäuses ist, also $F\gamma R$ der 6,28 Teil desselben.)

1. Dreieckverspannung.

Versteifungskräfte:

Nach Seite 34 erfährt am Punkte I′ die horizontale Stange $F\gamma R \cdot 0{,}35041$ Druck, die schräge Stange $F\gamma R \cdot 0{,}07900$ Druck.

Spannkräfte:

Die horizontale und schräge Stange $S \cdot 0{,}57735$.

Die Größe von S bestimmt sich aus der Bedingung:

$$F\gamma R \cdot 0{,}35041 = S \cdot 0{,}57735,$$

oder $S = F\gamma R \cdot 0{,}60693$. Diesen Wert in die Tabelle Seite 38 eingesetzt, gibt:

φ^0	Moment.	Normalkraft.
0	$- F\gamma R^2 \cdot 0{,}02735$	$- F\gamma R \cdot 0{,}60693$
10	$- F\gamma R^2 \cdot 0{,}01814$	$- F\gamma R \cdot 0{,}59771$
20	$+ F\gamma R^2 \cdot 0{,}00925$	$- F\gamma R \cdot 0{,}57033$
30	$+ F\gamma R^2 \cdot 0{,}05395$	$- F\gamma R \cdot 0{,}52562.$

In der Fig. 29 (Tafel) sind als schwach ausgezogene Kurven die Momentenlinie der Versteifungs- und Schwerkräfte[1]) und jene der Spannkräfte eingetragen. Die stark ausgezogene Kurve begrenzt die resultierende Momentenfläche. (Siehe auch Beispiel, Seite 55.)

Beanspruchung der Spannstangen:

Stange I—II: $F\gamma R \cdot 0{,}70082$ Zug;

Stange I—III, II—III: $F\gamma R \cdot 0{,}42941$ Zug;

Stange I′—II′: 0;

Stange I′—III′, II′—III′: $F\gamma R \cdot 0{,}27141$ Zug.

1) In der Figur kurz mit „Kurve der Versteifungskräfte“ bezeichnet.

2. Radialverspannung.

Versteifungskräfte:

Nach Seite 36 ergeben sich die Komponenten am Punkte I′

$$X = F\gamma R \cdot 0{,}14012 \text{ und } X \cdot 1{,}73205 = F\gamma R \cdot 0{,}24269.$$

Die Stange selbst erfährt $2X = F\gamma R \cdot 0{,}28024$ Druck.

Spannkräfte:

Es besteht die Bedingung $S = F\gamma R \cdot 0{,}28024.$

Dieser Wert in der auf Seite 38 angegebenen Tabelle eingesetzt:

φ^0	Moment	Normalkraft
0	$- F\gamma R^2 \cdot 0{,}01263$	$- F\gamma R \cdot 0{,}28024$
10	$- F\gamma R^2 \cdot 0{,}00838$	$- F\gamma R \cdot 0{,}27598$
20	$+ F\gamma R^2 \cdot 0{,}00427$	$- F\gamma R \cdot 0{,}26334$
30	$+ F\gamma R^2 \cdot 0{,}02491$	$- F\gamma R \cdot 0{,}24270.$

In Fig. 30 (Tafel) sind in gleicher Weise wie vorher die Momentenflächen für die Versteifungs- und Schwerkräfte sowie Spannkräfte und deren Resultierende eingetragen.

Das Gehäuse mit den sechs radialen Stangen wird bei dieser Größe der Spannkräfte noch kein eigentliches Spannwerk, es geht vielmehr in einen mit drei radialen Stangen versteiften Ring über; wenn noch größere Spannkräfte in Anwendung kommen, wird auch dieses zu einem solchen.

Bei den Spannwerken sind die zwischen den Punkten I, III′, II u. s. f. liegenden Ringstücke alle ähnlich beansprucht. Über den mittleren größeren Teil derselben erstrecken sich die negativen Momente, während in der Nähe der Stangenbefestigungsstellen positive Momente auftreten. — Da negative Momente eine Vergrößerung der Krümmung und positive eine Verringerung derselben zur Folge haben, so läßt sich schließen, daß die elastische Linie im allgemeinen außerhalb des durch die Punkte I, III′ etc. bestimmten Kreises verläuft. Es nähert sich die Beanspruchung der eines Ringes mit sechs gleich großen, gleich verteilten, radialen Kräften. Die elastische Linie eines solchen ist in Fig. 31 ungefähr, verzerrt dargestellt.

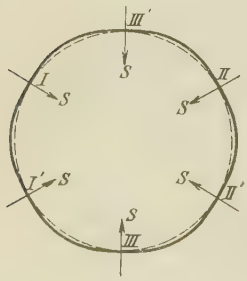


Fig. 31.

Die in der Praxis übliche Methode des Verspannens: die Abstände zwischen Gehäuse und Induktor gleich zu halten, wird sich bei den Spannwerkgehäusen auf die Abstände in der Nähe der Verspannungspunkte beschränken; dies deckt sich aber ziemlich

mit der hier angenommenen Vorschrift, die Stäbe auf gleiche Länge einzustellen.

Die letztere Methode ist ganz selbständig, während bei der anderen das Rundspannen sich nach dem Magnetrade richtet, das für sich gelagert ist. Wenn nicht besondere Aufmerksamkeit verwendet wird, ist eine Exzentrizität zwischen Gehäuse- und Magnetrad-Mitte leicht möglich und diese ist durch das Verspannen auch noch zu beseitigen. Natürlich kann in einem solchen Falle von einer Berechnung keine Rede sein.

In dem Beispiele war die Aufstellung durch die Bedingung, daß gerade kein Stab gedrückt sein soll, gegeben. Bei größeren Spannkräften ist es notwendig, wenn ein der Rechnung entsprechender Zustand hergestellt werden soll, daß die Spannung eines Stabes gemessen werden kann. Am besten wählt man dazu einen der weniger beanspruchten Stäbe, indem man ein kleines Dynamometer einschaltet; zu empfehlen wäre eine Konstruktion, wie sie Lasche für einen anderen Zweck in der am Eingange bereits genannten Abhandlung (Z. d. V. d. Ing. 1901 Seite 1022) angibt. Die Spannung dieses Stabes muß mit der in der Rechnung annommenen übereinstimmen; außerdem müssen auch, um noch einmal zu wiederholen, die Längen der Stäbe gleich sein.

Eine dem Spannwerkgehäuse mit Radialverspannung sehr ähnliche Konstruktion ist die mit Rückenverspannung. Man kann die bei der ersteren gefundenen Resultate hierfür anwenden, es müssen nur bei der Aufstellung, außer den radialen Stäben, auch die Umfangsstäbe unter sich gleiche Länge haben. (Siehe Anmerkung.)

2. Gehäuse, welche gegen das Fundament abgesteift sind.

Diese Konstruktionen sind verwickelter als die Spannwerke; während bei den letzteren die Auflagerung in selbständiger Weise an der Formänderung des Ringes teilnahm, ist jetzt eine Abhängigkeit zwischen Auflager- und Versteifungskräften vorhanden.

Es sollen hier nur jene Fälle untersucht werden, bei denen die Zahl der Versteifungsstellen am Gehäuseringe an sich schon genügt, um den Ring, trotz des Einflusses der Schwerkraft, rund zu halten. Als Lagerung sei Einspannung und gelenkartige Unterstützung im Schwerpunktskreise in Betracht gezogen.

Die Konstruktionen mit unvollkommener Versteifung, wie z. B. das nur im unteren Scheitel versteifte Gehäuse, benötigen eine erhebliche Mit-

Anmerkung:

Es liegt sehr nahe, an den Stellen I, II, III, I′ u. s. f. auch den Ring gelenkartig auszubilden, für diesen Fall sind der allgemeine Gang der Lösung und die nötigen Formeln in Föppl, Mechanik, II. Band, § 50 und 51 vollständig angegeben.

wirkung der Auflagerung. Es würde das Horizontalhalten der Auflagerquerschnitte, der Versteifungskraft nur den unteren Halbring als Wirkungskreis lassen und gelenkartige Lagerung im Schwerpunktskreise der Scheitelkraft nur einen nicht sonderlich günstigen Einfluß auf den ganzen Ring gestatten. Wird dagegen ein Stützenmoment von passender Größe angewendet, so kann, wie sich voraussehen läßt, Befriedigendes zustande kommen. Welches die beste Auflagerung und Größe der Versteifungskraft ist, muß ausprobiert werden, hier eine Lösung dafür zu geben wird nicht als Pflicht erachtet.

Untersuchung des in Fig. 32 dargestellten Gehäuses.

(Dasselbe ist von Lasche in seiner Abhandlung angegeben, er bezeichnet es allerdings gleich nachher als „kaum auszuführen"; trotzdem soll dieser Konstruktion eine eingehendere Betrachtung gewidmet werden.)

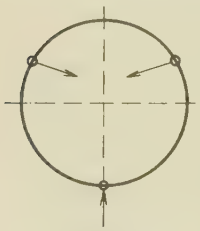


Fig. 32.

Es sind im Abstande $\frac{R}{2}$ von der horizontalen Mittellinie die beiden auf dem Schwerpunktskreise liegenden Punkte des oberen Halbringes durch schräge Stangen nach innen gezogen, der Scheitel der unteren Ringhälfte wird gehoben. Nach der auf Seite 32 angenommenen Aufstellungsvorschrift — für den unteren Scheitel muß der Abstand vom Mittelpunkte des Gehäuses R sein — gestaltet sich die Rechnung in folgender Weise:

Am Ringe das Einspannmoment ausgeübt.

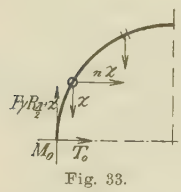


Fig. 33.

Oberer Halbring.

Betrachtung des linken Quadranten.

Die Versteifungskraft wird in eine vertikale Komponente X und in eine horizontale nX zerlegt. $\frac{1}{n}$ ist die Tangente des Neigungswinkels der Versteifungsstange zur Horizontalen. Um den Einfluß des Winkels zu erkennen, soll die Rechnung für $n = 3$ $(18\frac{1}{2}^0)$[1]) und $n = 1{,}73205$ (30^0) durchgeführt werden.

Im Horizontalschnitte: das Moment M_0, die Schubkraft T_0, die Normalkraft $F\gamma R\frac{\pi}{2} + X$.

Für einen Schnitt φ ist: das Moment

$$M = M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi$$
$$+ XR(1-\cos\varphi) - [XR(\cos\alpha-\cos\varphi) + nXR(\sin\varphi-\sin\alpha)]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}},$$

1) Der Neigungswinkel $18\frac{1}{2}^0$ ist der Fig. in der Abhandlung entnommen.

die Normalkraft:

$$N = -\left(F\gamma R\frac{\pi}{2} + X\right)\cos\varphi - T_0\sin\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi + [X\cos\varphi - nX\sin\varphi)]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Die Formänderungsarbeit:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - T_0R\sin\varphi + XR(1-\cos\varphi)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - T_0R\sin\varphi + XR(1-\cos\varphi) - XR(\cos\alpha-\cos\varphi) - nXR(\sin\varphi-\sin\alpha)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial T_0} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X} = 0$$

ergibt sich, wenn $n = 3$:

$$M_0 = +F\gamma R^2\cdot 0{,}03301; \quad T_0 = F\gamma R\cdot 0{,}38856; \quad X = F\gamma R\cdot 0{,}15137;$$

$n = 1{,}73205$:

$$M_0 = +F\gamma R^2\cdot 0{,}03172; \quad T_0 = F\gamma R\cdot 0{,}40541; \quad X = F\gamma R\cdot 0{,}26053.$$

Der untere Halbring.

Die Versteifungskraft am Scheitelpunkte sei $2Z$; im Anfangsquerschnitte des linken Quadranten (Vertikalschnitt) hat man die Kraft Z, ein Moment M_s und die Normalkraft N_s einzuführen.

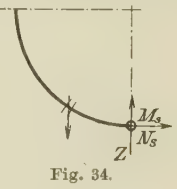


Fig. 34.

Für einen Schnitt φ ist:

das Moment

$$M = M_s - N_sR(1-\cos\varphi) - ZR\sin\varphi + F\gamma R^2(\varphi\sin\varphi - 1 + \cos\varphi),$$

die Normalkraft $N = +N_s\cos\varphi - Z\sin\varphi + F\gamma R\varphi\sin\varphi$.

Die Formänderungsarbeit:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(M_s - N_sR(1-\cos\varphi) - ZR\sin\varphi + F\gamma R^2(\varphi\sin\varphi - 1 + \cos\varphi)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi.$$

Aus $\frac{\partial A}{\partial M_s} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial N_s} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial Z} = 0$ findet man:

$$M_s = +F\gamma R^2\cdot 0{,}04010; \quad N_s = F\gamma R\cdot 0{,}39359 \text{ und } Z = F\gamma R\cdot 0{,}26748.$$

Für den Horizontalschnitt ist:

das Moment $-F\gamma R^2 \cdot 0{,}05018$, die Normalkraft $+F\gamma R \cdot 1{,}30332$,
die Schubkraft $-F\gamma R \cdot 0{,}39359$.

Das linke Auflager des Gehäuses hat auszuüben:

1) $n = 3$;

ein Moment $+F\gamma R^2(0{,}03301 + 0{,}05018) = +F\gamma R^2 \cdot 0{,}08319$;

einen vertikalen Auflagerdruck

$$F\gamma R(3{,}14159 + 0{,}15137 - 0{,}26748) = F\gamma R \cdot 3{,}02548;$$

einen Horizontalschub

$$F\gamma R(-0{,}38856 + 0{,}39359) = F\gamma R \cdot 0{,}00503$$
(von der Ringmitte nach außen gerichtet).

2) $n = 1{,}73205$;

ein Moment $+F\gamma R^2(0{,}03172 + 0{,}05018) = +F\gamma R^2 \cdot 0{,}08190$;

einen vertikalen Auflagerdruck

$$F\gamma R(3{,}14159 + 0{,}26053 - 0{,}26748) = F\gamma R \cdot 3{,}13465;$$

einen Horizontalschub

$$F\gamma R(-0{,}40451 + 0{,}39359) = F\gamma R \cdot 0{,}01092$$
(nach der Ringmitte gerichtet).

Gelenkartige Lagerung.

Nun ist es nötig, eine durch die lotrechte Mittellinie entstehende Hälfte in Rechnung zu ziehen, X und Z behalten ihre Bedeutung wie früher, der Horizontalschub H, der lotrechte Auflagerdruck $F\gamma R\pi + X - Z$.

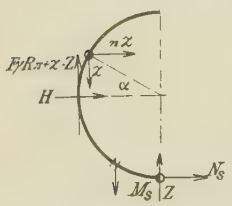


Fig. 35.

Im unteren Quadranten ist für einen Schnitt φ:

das Moment

$$M = M_s - N_s R(1 - \cos\varphi) - ZR\sin\varphi + F\gamma R^2(\varphi\sin\varphi - 1 + \cos\varphi),$$

die Normalkraft

$$N = +N_s\cos\varphi - Z\sin\varphi + F\gamma R\varphi\sin\varphi.$$

Im oberen Quadranten ist für einen Schnitt φ:

das Moment

$$M = M_s - N_s R(1 + \sin\varphi) - ZR - HR\sin\varphi + F\gamma R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1 - \cos\varphi) - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + XR(1 - \cos\varphi) - [XR(\cos\alpha - \cos\varphi) + nXR(\sin\varphi - \sin\alpha)]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}},$$

die Normalkraft

$$-\left(F\gamma R\frac{\pi}{2}+X\right)\cos\varphi - H\sin\varphi - N_s\sin\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi + \\ + \left[X\cos\varphi - nX\sin\varphi\right]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Die Formänderungsarbeit für den linken Halbring:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(M_s-N_sR(1-\cos\varphi)-ZR\sin\varphi+F\gamma R^2(\varphi\sin\varphi-1+\cos\varphi)\right)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\Big(M_s-N_sR(1+\sin\varphi)-ZR-HR\sin\varphi+F\gamma R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$+F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi)-F\gamma R^2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)+XR(1-\cos\varphi)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\Big(M_s-N_sR(1+\sin\varphi)-ZR-HR\sin\varphi+F\gamma R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$+F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi)-F\gamma R^2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)+XR(1-\cos\varphi)$$

$$-XR(\cos\alpha-\cos\varphi)-nXR(\sin\varphi-\sin\alpha)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}\,d\varphi.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial M_s}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial N_s}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial H}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial Z}=0 \text{ und } \frac{\partial A}{\partial X}=0$$

ergeben sich für den Fall, daß $n=3$ gewählt:

$M_s=+F\gamma R^2\cdot 0{,}05398$, $N_s=F\gamma R\cdot 0{,}30230$; $Z=F\gamma R\cdot 0{,}33438$, $X=F\gamma R\cdot 0{,}19336$, $H=-F\gamma R\cdot 0{,}01350$ (also entgegengesetzt der in Fig. 35 eingezeichneten Richtung);

die lotrechte Auflagerdruckkomponente:

$$F\gamma R(3{,}13159+0{,}19336-0{,}33438)=F\gamma R\cdot 2{,}99057.$$

Zur Probe für die Richtigkeit der Rechnung sei für diesen Fall noch die Momentenverteilung, infolge der Versteifungskräfte für sich, berechnet. Diese zu den Momenten der Schwerkräfte addiert, muß wieder die Gesamtbeanspruchung ergeben.

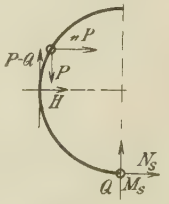


Fig. 38.

Die Versteifungskraft des oberen Quadranten in eine vertikale Komponente P und in eine horizontale nP $(n=3)$ zerlegt; am unteren Scheitel wirkt die Kraft $2Q$.

Unterer Quadrant.

Für einen Schnitt φ:

das Moment $M_s-N_sR(1-\cos\varphi)-QR\sin\varphi$.

Oberer Quadrant:

das Moment

$$M_s - N_s R(1 + \sin\varphi) - QR - HR\sin\varphi - PR(1 - \cos\varphi) - \\ - [PR(\cos\alpha - \cos\varphi) + nPR(\sin\varphi - \sin\alpha)]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Auf Grund der durchgeführten Rechnung kann angegeben werden:

$$N_s = -\frac{-P\cdot 0{,}11815 + Q\cdot 0{,}28540}{0{,}36706};\quad M_s = +\frac{PR\cdot 0{,}02532 + QR\cdot 0{,}12227}{0{,}36706}$$

und

$$H = -\frac{+P\cdot 0{,}60849 - Q\cdot 0{,}33710}{0{,}36706}.$$

Für $P = X = F\gamma R\cdot 0{,}19336$, $Q = Z = F\gamma R\cdot 0{,}33438$ ist

$$N_s = -F\gamma R\cdot 0{,}19775;\ M_s = +F\gamma R^2\cdot 0{,}12476;\ H = -F\gamma R\cdot 0{,}01345.$$

In den Fig. 36 und 37 (Tafel), sind die Momentenverteilungen in dieser Gehäusekonstruktion für beide Auflagerungsarten dargestellt; in Fig. 37 ist ferner mit schwach ausgezogenen bez. gestrichelten Linien die Momentenkurve der Schwerkräfte und Versteifungskräfte eingetragen.

Man sieht, daß der Neigungswinkel der Stangen innerhalb 18° und 30° nur von geringen Einfluß auf die Momente ist. Bemerkenswertes gibt der Vergleich der Konstruktion: Neigungswinkel der beiden Versteifungsstangen 30°, mit dem Radialspannwerkgehäuse, wobei die Verspannung nur soweit getrieben, daß gerade kein Stab durch Druck beansprucht ist. Diese Gehäuse unterscheiden sich nur dadurch, daß das eine in sich selbst, das andere mit dem Fundamente versteift ist. Die zugehörigen Fig. 30 und 36 a, b zeigen fast die gleiche Momentenverteilung, und es wird die untersuchte Konstruktion in ihren Eigenschaften sich mit jenem Gehäuse decken.

3) Gehäuse, welches zum Teile in sich, zum Teile mit dem Fundamente versteift ist.

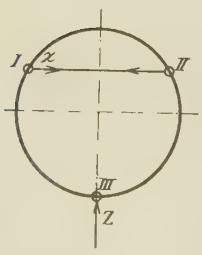


Fig. 39.

Die Punkte I, II des oberen Halbringes sind durch eine horizontale Zugstange verbunden; der Scheitel des unteren Halbringes wird durch eine, zwischen Ring und Fundament eingeschaltete, Druckschraube versteift.

Für den Fall, daß am Ringe *in den Auflagern Einspannmomente ausgeübt* werden, ist

für den oberen Halbring, wenn X die Größe der Versteifungskraft am Punkte I, für einen Schnitt φ:

das Moment

$$M = M_0 + F\gamma R^2 \frac{\pi}{2}(1 - \cos\varphi) - T_0 R \sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - \\ - XR(\sin\varphi - \sin\alpha)_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}},$$

die Normalkraft

$$N = -T_0 \sin\varphi - F\gamma R\frac{\pi}{2}\cos\varphi + F\gamma R\varphi\cos\varphi - X(\sin\varphi)_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Die Formänderungsarbeit:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - To R\sin\varphi \\ - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\Big)^2 \frac{R}{E\Theta}d\varphi \\ + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\Big(M_0 + F\gamma R^2\frac{\pi}{2}(1-\cos\varphi) - T_0 R\sin\varphi - F\gamma R^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \\ - XR(\sin\varphi - \sin\alpha)\Big)^2\frac{R}{E\Theta}d\varphi.$$

Aus den Bedingungen $\frac{\partial A}{\partial M_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial T_0} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$ findet man

$$M_0 = +F\gamma R^2 \cdot 0{,}02820, \quad T_0 = F\gamma R \cdot 0{,}34099, \quad X = F\gamma R \cdot 0{,}49852.$$

Beanspruchung des unteren Halbring siehe Seite 43.

Zusammenstellung der Beanspruchung.

	Oberer Halbring			Unterer Halbring	
φ^0	Moment	Normalkraft	φ^0	Moment	Normalkraft
0	$+ 0{,}02820 F\gamma R^2$	$- 1{,}57080 F\gamma R$	0	$+ 0{,}04010 F\gamma R^2$	$+ 0{,}39359 F\gamma R$
10	— 0,00892	— 1,43427	10	+ 0,00421	+ 0,37147
20	— 0,00770	— 1,26467	20	— 0,01604	+ 0,39776
30	+ 0,02157	— 1,32667	30	— 0,01854	+ 0,46892
40	— 0,00256	— 1,20812	40	— 0,00912	+ 0,58833
50	— 0,01063	— 1,09186	50	+ 0,00600	+ 0,71660
60	— 0,00661	— 0,98884	60	+ 0,01856	+ 0,87206
70	+ 0,00031	— 0,90826	70	+ 0,01985	+ 1,03132
80	+ 0,00638	— 0,85797	80	— 0,00006	+ 1,17998
90	+ 0,00875	— 0,83951	90	— 0,05018	+ 1,30332

Fig. 40 (Tafel), gibt die Verteilung der Momente über den linken Halbring.

Das linke Auflager des Gehäuses hat auszuüben:

ein Moment $+ F\gamma R^2(0{,}02820 + 0{,}05018) = + F\gamma R^2 \cdot 0{,}07838$,

einen vertikalen Auflagerdruck

$$F\gamma R(3{,}14159 - 0{,}26748) = F\gamma R \cdot 2{,}87411,$$

einen Horizontalschub

$$F\gamma R(-0{,}34099 + 0{,}39359) = F\gamma R \cdot 0{,}05260$$

(von der Ringmitte nach außen gerichtet).

Die Zugkraft in der horizontalen Doppelstange: $F\gamma R \cdot 0{,}49852$.

Die Druckkraft im unteren Scheitel: $2Z = F\gamma R \cdot 0{,}53496$.

Die Momentenfläche ist wieder den in Fig. 36 (Tafel) dargestellten sehr ähnlich.

Da die eben behandelte Konstruktion praktische Bedeutung besitzt, sollen noch die Formänderungen an den Stellen I, I′, III und III′ angegeben werden. Nach diesen hat sich die endgiltige Dimensionierung des Ringquerschnittes zu richten.

Senkung der Stelle III′: $0{,}00066 \cdot F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta}$,

Horizontalverschiebung der Stelle I: 0 (Probe),

Senkung der Stelle I: $0{,}00006 \cdot F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta}$,

Horizontalverschiebung der Stelle I′: $0{,}00100 \cdot F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta}$ (nach innen),

Hebung der Stelle I′: $0{,}00021 \cdot F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta}$,

Verschiebung der Stelle III: 0 (Probe).

Ein Vergleich dieser Werte mit den auf Seite 29 und 30 für das unversteifte Gehäuse angegebenen läßt die Wirkung dieser Versteifungsanordnung erkennen.

Es sei wieder daran erinnert, daß bei der Montage der Abstand der Punkte I und II auf die in der Zeichnung angegebene Größe eingestellt werden muß.

An Stelle der Versteifung im Scheitel des unteren Halbringes könnte man auch die Punkte I′, II′ durch eine Stange verbinden. Die Beanspruchung des oberen und unteren Halbringes ist dann wieder der Größe nach gleich, sie ist mit der vorhergehenden Gehäuseberechnung (oberer Halbring) bekannt. Die Stange I′, II′ wird gedrückt und ist deshalb entsprechend stärker zu halten. Für die Ausführung dürfte dies kein Hindernis sein, denn diese Stange ist bei fertig montiertem Gehäuse dem Auge kaum sichtbar.

Einfluß einer Ausdehnung des Ringes infolge Erwärmung auf die Beanspruchung dieser Gehäusekonstruktionen.

Spannwerkgehäuse.

Verschiebliche Lagerung.

Es bezeichne: T in Cels.° den Unterschied zwischen Betriebs- und Aufstellungstemperatur des Ringes (streng genommen käme die Ring- und Stangentemperatur in Betracht, die letztere wird sich aber nicht viel von jener des Außenraumes, also der Aufstellungstemperatur, unterscheiden); f den Stangenquerschnitt (der Doppelstangen); e den Elastizitätsmodul des Stangenmateriales.

Nachdem die Untersuchungen über Temperaturspannungen im Magnet-

rade vorangegangen, können die hier in Betracht kommenden Formeln sofort angegeben werden.

Im Horizontalschnitte ist:

$$\text{die Normalkraft } N_0 = -\lambda T E F \cdot C_{II},$$

$$\text{das Moment } M_0 = -\lambda T E F \cdot C_{II} \cdot R \cdot 0{,}04507,$$

wobei

$$C_{II} = \frac{1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 0{,}00169 + 0{,}95662 + \frac{E}{e} \cdot \frac{F}{f} \cdot 0{,}57735} \text{ für Dreieckverspannung}$$

und

$$C_{II} = \frac{1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 0{,}00169 + 0{,}95662 + \frac{E}{e} \cdot \frac{F}{f}} \text{ für Radialverspannung ist.}$$

Im Schnitte $\varphi = 30^0$ ist:

$$M = +\lambda T E F \cdot C_{II} \cdot R \cdot 0{,}08890 \text{ (maximales Moment)},$$

$$N = -\lambda T E F \cdot C_{II} \cdot 0{,}86603.$$

Die Stangenbeanspruchung ist:

$$\lambda T E F \cdot C_{II} \cdot 0{,}57735 \text{ bei Dreieckverspannung},$$

$$\lambda T E F \cdot C_{II} \text{ bei Radialverspannung}.$$

Formänderungen:

Radiale Verschiebung der Stelle $\varphi = 0$ (Auflager), $\varphi = 60^0$ etc.:

$$-R\lambda T \cdot \left(1 + C_{II}(0{,}00148 \left(\frac{R}{t}\right)^2 - 0{,}95346)\right) \text{ (nach außen)}.$$

Radiale Verschiebung der Stelle $\varphi = 30^0$, $\varphi = 90^0$ etc.:

$$-R\lambda T \cdot \frac{E}{e} \cdot \frac{F}{f} C_{II} \cdot 0{,}57735 \text{ (nach außen) bei Dreieckverspannung},$$

$$-R\lambda T \cdot \frac{E}{e} \cdot \frac{F}{f} \cdot C_{II} \text{ (nach außen) bei Radialverspannung}.$$

Die Spannweitenänderung ist doppelt so groß als der Wert für die radiale Verschiebung bei $\varphi = 0^0$.

Die Auflager sind unverschieblich:

Es tritt zu dem vorigen Spannungszustande noch ein zweiter hinzu, der durch den Horizontalschub hervorgerufen wird. Der Horizontalschub (mit $2\,T_0$ bezeichnet) hält die Auflagerstellen des Ringes in ihrer Lage fest.

Der Spannungszustand den $2\,T_0$ im Ringe hervorruft, kann auf Grund durchgeführter Rechnungen durch folgende Ausdrücke angegeben werden. Es ist dabei auf die achsiale Längenänderung durch die Normalkräfte im Ringe nicht Rücksicht genommen.

Für die Dreieckverspannung.

Im Horizontalschnitte:

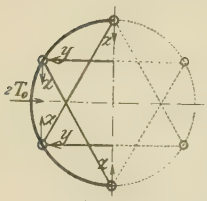


Fig. 41.

$$M_0 = \frac{0{,}234 + 95{,}3\varkappa + 2000\varkappa^2}{0{,}948 + 337{,}7\varkappa + 3142\varkappa^2} \cdot T_0 R$$

die Komponente $X = \frac{0{,}689 + 144{,}0\varkappa}{0{,}948 + 337{,}7\varkappa + 3142\varkappa^2} T_0$,

die Komponente $Y = \frac{0{,}219 + 240{,}1\varkappa}{0{,}948 + 337{,}7\varkappa + 3142\varkappa^2} T_0$,

wobei $\varkappa = \frac{\Theta}{f} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{E}{e}$ ist.

Für einen Schnitt φ ist:

das Moment $M_0 + 2XR(1 - \cos\varphi) - T_0 R \sin\varphi + YR(\sin\varphi - \sin\alpha)_{\alpha}^{\pi} - XR(\cos\alpha - \cos\varphi)_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$,

die Normalkraft $-2X\cos\varphi - T_0 \sin\varphi + (X\cos\varphi + Y\sin\varphi)_{\alpha}^{\pi}$.

Die Stangenbeanspruchung:

die horizontalen Stangen (I—II und I′—II′): $-(Y + X \cdot 0{,}578)$ (gedrückt),

die schrägen Stangen: $X \cdot 1{,}155$ (gezogen).

Für die Radialverspannung.

Im Horizontalschnitte:

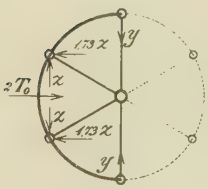


Fig. 42.

$$M_0 = \frac{0{,}705 + 378\varkappa + 4000\varkappa^2}{2{,}318 + 1174\varkappa + 6283\varkappa^2} \cdot T_0 R,$$

die Komponente

$$X = \frac{0{,}032 + 210\varkappa}{2{,}318 + 1174\varkappa + 6283\varkappa^2} \cdot T_0,$$

die Komponente

$$Y = \frac{2{,}088 + 858\varkappa}{2{,}318 + 1174\varkappa + 6283\varkappa^2} T_0.$$

Für $\varkappa$ der gleiche Wert wie bei der Dreieckverspannung.

Für einen Schnitt φ ist:

das Moment $M_0 - T_0 R\sin\varphi + (Y - X)R(1 - \cos\varphi) + XR(\cos\alpha - \cos\varphi)_{\alpha}^{\pi} + 1{,}73\,XR(\sin\varphi - \sin\alpha)_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$,

die Normalkraft $-(Y - X)\cos\varphi - T_0 \sin\varphi - (X\cos\varphi - 1{,}73\ X\sin\varphi)_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$.

Die Stangenbeanspruchung:

die schrägen Stangen $2X$ (gedrückt), die vertikalen $2Y$ (gezogen).

Die Horizontalverschiebung eines Auflagers infolge der Kraft $2T_0$:

Bei der Dreieckverspannung:

$$(-M_0 - XR\cdot 0{,}625 - YR\cdot 0{,}307 + T_0 R\cdot 0{,}785)\frac{R^2}{E\Theta},$$

bei der Radialverspannung:

$$(-M_0 - XR\cdot 0{,}407 - YR\cdot 0{,}500 + T_0 R\cdot 0{,}785)\frac{R^2}{E\Theta},$$

wobei für M_0, X und Y die aus den vorher angegebenen Formeln berechneten Werte einzusetzen sind.

Durch Gleichsetzen der Verschiebung eines Auflagers bei zwangloser Lagerung mit jener infolge des Horizontalschubes erhält man eine Gleichung, aus der sich T_0 einfach berechnen läßt. (Siehe Beispiel.)

Verschiebung des Scheitels infolge des Horizontalschubes.

Bei der Dreieckverspannung:

$$(M_0\cdot 0{,}571 + XR\cdot 0{,}431 + YR\cdot 0{,}217 - T_0 R\cdot 0{,}500)\frac{R^2}{E\Theta},$$

bei der Radialverspannung:

$$(M_0\cdot 0{,}571 + XR\cdot 0{,}301 + YR\cdot 0{,}356 - T_0 R\cdot 0{,}500)\frac{R^2}{E\Theta}.$$

Gehäuse, im oberen Halbringe durch eine horizontale Stange, im unteren durch Unterstützen des Scheitels versteift.

Der Abstand der Stützungsstelle vom Schwerpunktskreise, der sich aus dem Einspannmomente bei dem durch die Schwerkraft belasteten Gehäuse ergibt, ist

$$a = \frac{0{,}0784}{3{,}14} R = 0{,}025R.$$

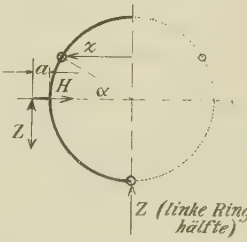


Fig. 43.

Es wird die Teilung der Rechnung, die sich beim vorhergehenden Falle von selbst ergab, wieder vorgenommen.

Zunächst die Beziehung zwischen dem Momente M_s, der Kräfte N_s und Z im unteren Scheitelschnitte und den Kräften X und H aufgesucht. Der Kürze halber werden nur die Ergebnisse, die aus der Rechnung nach Castigliano gefunden, angegeben.

$$M_s{}^{1}) = -HR\cdot 0{,}1817 + ZR\cdot 0{,}4966 + XR\cdot 0{,}0865,$$

$$N_s = -H\cdot 0{,}5000 - Z\cdot 0{,}3344 + X\cdot 0{,}1955.$$

Die Kräfte X, H, Z bestimmen sich aus der Bedingung, daß die Verschiebung in ihrer Richtung von bekannter Größe ist. Die Formänderungsarbeit für die linke Ringhälfte:

1) M_s und N_s sind in die Rechnung mit positivem Vorzeichen eingeführt.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_s - N_s R(1-\cos\varphi) - ZR\sin\varphi\right)^2 \frac{R}{E\Theta}\,d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \left(M_s - N_s R(1+\sin\varphi) - Z(R+a) - HR\sin\varphi\right)^2 \frac{R}{E\Theta}\,d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \left(M_s - N_s R(1+\sin\varphi) - Z(R+a) - HR\sin\varphi + XR(\sin\varphi - \sin\alpha)\right)^2 \frac{R}{E\Theta}\,d\varphi.$$

$$\frac{\partial A}{\partial X} = R\lambda T\cos\alpha + X\frac{R\cos\alpha}{ef},\quad \frac{\partial A}{\partial H} = R\lambda T,\quad \frac{\partial A}{\partial Z} = R\lambda T.$$

$$X = \frac{120\,005}{27\,415{,}055 + 21{,}48\varkappa}\cdot\lambda T\cdot\frac{E\Theta}{R^2},$$

$$H = \frac{2\,131\,140{,}5 + 1599\varkappa}{27\,415{,}055 + 21{,}48\varkappa}\cdot\lambda T\cdot\frac{E\Theta}{R^2},\qquad \varkappa = \frac{E}{e}\cdot\frac{\Theta}{f}\cdot\frac{1}{R^2}.$$

$$Z = \frac{1\,841\,226{,}4 + 1427\varkappa}{27\,415{,}055 + 21{,}48\varkappa}\cdot\lambda T\cdot\frac{E\Theta}{R^2}.$$

In einem Schnitte φ des unteren Quadranten der linken Ringhälfte ist:

das Moment $M = M_s - N_s R(1-\cos\varphi) - ZR\sin\varphi$,

die Normalkraft $N = N_0\cos\varphi - Z\sin\varphi$.

In einem Schnitte φ des oberen Quadranten der linken Ringhälfte ist:

das Moment $M = M_s - N_s R(1+\sin\varphi) - Z(R+a) - HR\sin\varphi + XR(\sin\varphi - \sin\alpha)\Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$,

die Normalkraft $N = -N_s\sin\varphi - H\sin\varphi + X\sin\varphi\Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$.

Beispiel.

Gehäusegewicht $Q = 50\,000$ kg;

Radius des Schwerpunktskreises $R = 495$ cm;

für den tragenden Ringteil ist:

der Querschnitt $F = 750$ cm^2 (konstant),

das Trägheitsmoment[1]) $\Theta = 39\,060$ cm^4 (konstant),

das Widerstandsmoment $W = 3120$ cm^3,

der Elastizitätsmodul des Materiales $E = 2\cdot 10^6$ atm.

Belastung durch die Schwerkraft.

Aus der Beziehung

$F\gamma R 2\pi = Q$ berechnet sich $\gamma = \frac{Q}{F\cdot R\cdot 2\pi} = 0{,}02144\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$.

1) Bei Blechpaketringen ermittelt man die Konstante $E\Theta$ am besten aus einem einfachen Biegungsversuche.

Es ist dann:

$$F\gamma R = 7960 \text{ kg}; \quad F\gamma R^2 = 3\,940\,000 \text{ cmkg}, \quad \frac{R^2}{E\Theta} = 3{,}14 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{kg}},$$

$$\frac{R}{EF} = 0{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}.$$

A) Der Ring unversteift verwendet.

1) *Die Auflagerung bewirke das Einspannmoment am Ringe*, der Abstand der Unterstützungsstelle vom Schwerpunktskreise beträgt also

$$495 \cdot 0{,}07 = 34{,}6 \text{ cm}.$$

Das Einspannmoment ist: $2F\gamma R^2 \cdot 0{,}11 = +\ 866\,000$ cmkg (linke Seite).

Im Horizontalschnitte ist:

das Moment $M_0 = F\gamma R^2 \cdot 0{,}11 = +\ 433\,000$ cmkg (maximales Moment),

die Normalkraft $N_0 = F\gamma R \cdot 1{,}57 = 12\,500$ kg (Druck),

die Schubkraft $T_0 = F\gamma R \cdot 0{,}639 = 5090$ kg (von außen nach innen).

Dies hat die Verbindung zwischen der oberen und unteren Ringhälfte zu übertragen.

Die Beanspruchung des Ringmateriales in der Nähe des Horizontalschnittes: $\sigma = \frac{M_0}{W} + \frac{N_0}{F} = 139 + 17 = 156$ atm (Druckseite).

Die Formänderung ist im Scheitel am größten, die Senkung ist dort:

$$+\ 0{,}00624 F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} = 0{,}08 \text{ cm}.$$

Die Stelle $\varphi = 30^0$ verschiebt sich:

$$\text{vertikal} \quad -\ 0{,}00106 F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} = 0{,}013 \text{ cm (Hebung)},$$

$$\text{horizontal} \quad -\ 0{,}00400 F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} = -\ 0{,}05 \text{ cm (nach außen)}.$$

Um die Größe der Längenänderung der Ringmittellinie durch die Normalkräfte zu zeigen, sei die bisherige Rechnung mit Rücksicht darauf noch einmal durchgeführt.

$$F\gamma R = 7957{,}75, \quad F\gamma R^2 = 3\,939\,086, \quad \frac{R^2}{E\Theta} = 3{,}13652 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{R}{EF} = 0{,}33000 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{ferner } t^2 = \frac{\Theta}{F} = 52{,}08 \text{ cm}^2$$

$$\text{und die Konstante } C_{\text{I}} = \frac{\left(\frac{R}{t}\right)^2 \cdot 0{,}19028 - 0{,}78540}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 \cdot 0{,}29756 + 1{,}57080} = 0{,}63819.$$

Es ist dann:

$$M_0 = F\gamma R^2(-\ 0{,}29756 + C_{\text{I}} \cdot 0{,}63662) = 428\,258 \text{ cmkg},$$

$$T_0 = F\gamma R C_{\text{I}} = 5078{,}56 \text{ kg}.$$

Die Scheitelsenkung:

$$(M_0 \cdot 0{,}57080 + F\gamma R^2 \cdot 0{,}26345 - T_0 R \cdot 0{,}50000) \frac{R^2}{E\Theta} +$$

$$+ (F\gamma R \cdot 0{,}86685 + T_0 \cdot 0{,}5) \frac{R}{EF} = 0{,}079225 + \mathbf{0{,}003115} = 0{,}082340 \text{ cm}.$$

2) *Der Ring sei im Abstande* $a = 80$ cm *vom Schwerpunktskreise gestützt.*

Das am Ringe ausgeübte Moment ist: $25\,000 \cdot 80 = 2\,000\,000$ cmkg.

Im Horizontalschnitte ist: $M_0' = 1\,000\,000$ cmkg,

$$N_0 = 12\,500 \text{ kg},$$

$$T_0' = F\gamma R \left(\frac{2a}{R} + 0{,}500\right) = 6560 \text{ kg}.$$

Die Scheitelverschiebung:

$$(M_0' \cdot 0{,}571 + F\gamma R^2 \cdot 0{,}263 - T_0' R \cdot 0{,}500) \frac{R^2}{E\Theta} = -0{,}05 \text{ cm (Hebung)}.$$

Die Stelle $\varphi = 30^0$ verschiebt sich:

vertikal

$$(M_0' \cdot 0{,}164 + F\gamma R^2 \cdot 0{,}061 - T_0' \cdot R 0{,}125) \frac{R^2}{E\Theta} = -0{,}005 \text{ cm (Hebung)},$$

horizontal

$$(M_0' \cdot 0{,}342 - F\gamma R^2 \cdot 0{,}163 + T_0' R \cdot 0{,}307) \frac{R^2}{E\Theta} = +0{,}04 \text{ cm (nach innen)}.$$

Infolge der stark seitlichen Stützung senkt sich der ganze Ring um:

$$(M_0' \cdot 1{,}571 + F\gamma R^2 \cdot 0{,}467 - T_0' R) \frac{R}{E\Theta} \cdot a = 0{,}08 \text{ cm}.$$

3) *Am Ringe werde kein Moment eingeführt.*

Im Horizontalschnitte ist $T_0 = F\gamma R \frac{1}{2} = 3980$ kg, $N_0 = 12\,500$ kg.

Das größte Moment tritt bei $\varphi = 25^0$ auf, und ist

$$-F\gamma R^2 \cdot 0{,}09 = -355\,000 \text{ cmkg}.$$

Die Scheitelverschiebung: $+0{,}01345 F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} = 0{,}17$ cm (Senkung).

Die Stelle $\varphi = 30^0$ verschiebt sich:

vertikal $-0{,}00159 F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} = -0{,}02$ cm (Hebung),

horizontal $-0{,}00931 F\gamma R^2 \frac{R^2}{E\Theta} = -0{,}12$ cm (nach außen).

Für den Fall, daß keine gelenkartige Lagerung im Schwerpunktskreise vorliegt, kommt noch eine Hebung des ganzen Ringes hinzu, die sich nach dem Abstande des Unterstützungspunktes vom Schwerpunktskreise richtet und, wenn dieser bekannt, wie vorher bestimmt wird.

Diese Rechnungen bestätigen, daß der Ring, je nach der Lagerung, verschiedene Formen annehmen kann und ergeben, daß die Verschiebung des ganzen Ringes in lotrechter Richtung von ungefähr derselben Größe

wie die der Teilbewegungen ist. Die Formänderungen selbst sind verhältnismäßig gering und können leicht durch Anwendung eines größeren Trägheitsmomentes weiter herabgedrückt werden.

Deformationen viel bedeutenderer Art treten dagegen auf, wenn der aus mehreren Teilen zusammengesetzte Ring an den Stoßstellen sich nicht genau so verhält wie ein ungeteilter. Der soeben unter der Nummer 2 behandelte Fall der Lagerung entspricht fast völlig den praktischen Ausführungen. Im Horizontalschnitte ist das größte Moment zu übertragen und gerade dort befindet sich gewöhnlich die Stoßfuge. Sind die Schrauben nicht wirksam angeordnet[1]), nicht genügend angezogen[2]) oder gar zu gering im Querschnitte, so wird das Spannungsbild im Gehäuse vollständig geändert. Um dies zu zeigen sei gleich die äußerste Nachgiebigkeit der Stoßverbindung angenommen, daß also die Endquerschnitte des oberen Halbringes sich ungehindert drehen können, während der Horizontalschub, was auch gewöhnlich zutrifft, in Wirkung bleibt.

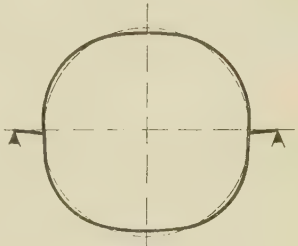


Fig. 41.

Es muß dann der untere Halbring allein das Stützenmoment aufnehmen, seine Beanspruchung und Formänderung vergrößert sich im Sinne des Falles 2 erheblich. Der obere Halbring dagegen wird sich wie jener unter 3 behandelte verhalten; der ganze Ring erfährt eine starke Senkung. Fig. 44 zeigt verzerrt die ungefähre Gestalt eines solchen Gehäuses. Zwischen diesem Zustande und dem unter 2 berechneten liegt der durch oben genannte Abweichungen bewirkte. Es sei noch bemerkt, daß ein Klaffen der Fuge auf der Innenseite um Papierstärke schon sehr viel ist.

Durch den Umstand, daß in der Praxis die Gehäuse ohne Versteifung im aufrechten und belasteten Zustande kreisrund bearbeitet werden, wird die ungünstige Beanspruchung des unteren Halbringes nicht beseitigt.

B) Der Ring mit Dreieckverspannung versehen.

1) *Von den Stützen wird das Einspannmoment ausgeübt;* die Verspannung soll so weit getrieben werden, daß *die untere horizontale Doppelstange* I′—II′ *gerade spannungslos* ist.

Die größte Beanspruchung ist an der Stelle $\varphi = 30^0$ im oberen Halbringe. (Siehe Figur 29, Tafel.)

1) Dieselben müssen möglichst gegen die Ringmitte zu liegen.

2) Siehe Magnetrad Seite 5.

Das Moment ist $F\gamma R^2(+ 0{,}0172 + 0{,}0539) = + 280\,000$ cmkg,

die Normalkraft $- F\gamma R(+ 1{,}219 + 0{,}526) = - 13\,900$ kg.

$$\sigma = \frac{280\,000}{3120} + \frac{13\,900}{750} = 90 + 19 = 109 \text{ atm (Druckseite).}$$

Das Einspannmoment beträgt: $0{,}0594\, F\gamma R^2 = + 234\,000$ cmkg; um es zu erzeugen muß der Abstand der Stützstelle vom Schwerpunktskreise $a = \frac{0{,}0594}{3{,}14} R = 9{,}4$ cm sein.

Die obere horizontale Doppelstange (I—II) ist mit $0{,}701\, F\gamma R = 5570$ kg gezogen. Die radiale Spannkraft S ist $F\gamma R \cdot 0{,}607 = 4830$ kg.

Radiale Verschiebung:

$$\text{der Auflager} \quad - S\left(R\frac{R^2}{E\Theta}\cdot 0{,}00148 - \frac{R}{EF}\cdot 0{,}953\right)$$

$$= - 0{,}0096 \text{ cm (nach außen),}$$

(Spannweitenänderung 0,0192 cm),

$$\text{der Stelle } \varphi = 30^0, \quad S\left(R\frac{R^2}{E\Theta}\cdot 0{,}00169 + \frac{R}{EF}\cdot 0{,}956\right)$$

$$= 0{,}0143 \text{ cm (nach innen).}$$

2) *Die Spannung der unteren horizontalen Doppelstange soll* 2000 kg *sein.*

Die radiale Spannkraft S bestimmt sich aus der Gleichung:

$$2000 = S \cdot 0{,}577 - F\gamma R \cdot 0{,}350, \quad S = 8300 \text{ kg.}$$

An der Stelle $\varphi = 30^0$ ist:

das Moment $(F\gamma R^2 \cdot 0{,}0172 + SR \cdot 0{,}0889) = + 433\,000$ cmkg,

die Normalkraft $- (F\gamma R \cdot 1{,}219 + S \cdot 0{,}866) = - 16\,900$ kg.

Die Spannung in diesem Querschnitte: $\sigma = 162$ atm (Druckseite).

Die obere horizontale Doppelstange erfährt

$$F\gamma R \cdot 0{,}350 + S \cdot 0{,}577 = 7\,570 \text{ kg Zug.}$$

Radiale Verschiebung:

der Auflager — 0,0165 cm (die Spannweitenänderung ist somit 0,0330 cm),

der Stelle $\varphi = 30^0 + 0{,}0245$ cm.

Spannungen infolge einer Erwärmung

des Ringes um $T = 30^0$ Cels.

$\lambda = \frac{1}{80\,000}$.

A) Der Ring unversteift verwendet.

Die Lager sind verschieblich:

Es dehnt sich der Ring gleichmäßig aus, die radiale Erweiterung beträgt $R\lambda T = 0{,}1855$ cm.

Die Lager sind unverschieblich:

$$\lambda TEF = 562\,500 \text{ kg.}$$

Im Horizontalschnitte: $T_0 = \lambda TEF\left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 6{,}721 = 805$ kg,

$$M_0 = + \lambda TEFR\left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot 4{,}279 = 253\,000 \text{ cmkg}.$$

Der Horizontalschub des Ringes ist: 1610 kg,

die Scheitelverschiebung: $- R\lambda T - T_0 R \frac{R^2}{E\Theta} \cdot 0{,}13662 + T_0 \frac{R}{EF} \cdot 0{,}50000$

$$= - 0{,}1855 - 0{,}1709 + 0{,}0002 = - 0{,}3562 \text{ cm}.$$

B) Der Ring mit Dreieckverspannung versehen.

Die Lager sind verschieblich.

Für die Stangen ist der Elastizitätsmodul $e = 2 \cdot 10^6$ atm.,
der Querschnitt (Doppelstange) $f = 6{,}28$ cm^2.

Die Konstante $C_{II} = \frac{1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 \cdot 0{,}00169 + 0{,}95662 + \frac{F}{f} \cdot 0{,}57735} = 0{,}01284;$

ohne Berücksichtigung der achsialen Längenänderung durch die Normalkräfte im Ringe

$$C_{II} = \frac{1}{\left(\frac{R}{t}\right)^2 0{,}00169 + \frac{F}{f} \cdot 0{,}57735} = 0{,}0130.$$

Im Horizontalschnitte:

$N_0 = - \lambda TEFC_{II} = - 7230$ kg, $M_0 = - \lambda TEFC_{II} R \cdot 0{,}0451$
$= - 161\,300$ cmkg.

An der Stelle $\varphi = 30^0$:

$N = - \lambda TEFC_{II} \cdot 0{,}866 = - 6260$ kg, $M = + \lambda TEFC_{II} \cdot R 0{,}0889$
$= + 317\,500$ cmkg.

Beanspruchung jeder Doppelstange: $\lambda TEFC_{II} \cdot 0{,}577 = 4180$ kg Zug.

Radiale Verschiebung:

der Auflager $- R\lambda T - R\lambda TC_{II}\left(\left(\frac{R}{t}\right)^2 \cdot 0{,}00148 - 0{,}953\right) =$

$- 0{,}1855 - 0{,}002385(6{,}970 - 0{,}953) = - 0{,}2000$ cm (nach außen),

der Stelle $\varphi = 30^0$, $- R\lambda T \frac{F}{f} C_{II} \cdot 0{,}577 = - 0{,}1646$ cm (nach außen).

Die Auflager sind unverschieblich.

Infolge des Horizontalschubes ist die Beanspruchung
im Horizontalschnitte:

die Schubkraft $- T_0$,

das Moment $M_0 = \frac{0{,}234 + 95{,}3\varkappa + 2000\varkappa^2}{0{,}948 + 337{,}7\varkappa + 3142\varkappa^2} \cdot T_0 R = + 0{,}342\ T_0 R,$

wobei $\varkappa = \frac{\Theta}{f} \cdot \frac{1}{R^2} = 0{,}0254$ und $\varkappa^2 = 0{,}000645$ ist.

Die Horizontalkomponente $Y = \frac{0{,}219 + 240{,}1\varkappa}{0{,}948 + 337{,}7 + 3142\varkappa^2} \cdot T_0 = + 0{,}547\ T_0$,

die Vertikalkomponente $X = \frac{0{,}689 + 144{,}0\varkappa}{0{,}948 + 337{,}7\varkappa + 3142\varkappa^2} \cdot T_0 = + 0{,}377\ T_0$.

Die Normalkraft $2X = 0{,}754\ T_0$.

Die Verschiebung der Auflager durch den Horizontalschub:

$$(- M_0 - XR \cdot 0{,}625 - YR \cdot 0{,}307 + T_0 R \cdot 0{,}785) \frac{R^2}{E\Theta} = 61{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot T_0.$$

Es besteht nun die Bedingung: $0{,}2 = 61{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot T_0$,

daraus $T_0 = 3260$ kg berechnet.

Nun ist nach Einsetzen des Wertes T_0 in die verschiedenen Formeln

$$M_0 = + 552\,000 \text{ cmkg}, \quad N_0 = - 2460 \text{ kg}.$$

An der Stelle $\varphi = 30^0$ ist:

das Moment $- T_0 R \cdot 0{,}057 = - 91\,800$ cmkg.

die Normalkraft $- T_0 \cdot 1{,}153 = - 3770$ kg (links von der Stelle),

$- T_0 \cdot 0{,}553 = - 1800$ kg (rechts von der Stelle).

Die Beanspruchung der horizontalen Doppelstangen:

$- T_0 \cdot 0{,}765 = - 2490$ kg Druck,

jene der schrägen: $T_0 \cdot 0{,}436 = 1420$ kg Zug.

Verschiebung des Scheitels:

$$(M_0 \cdot 0{,}571 + XR \cdot 0{,}431 + YR \cdot 0{,}217 - T_0 R \cdot 0{,}500) \frac{R^2}{E\Theta} = T_0 R \cdot 0{,}0784 \cdot 10^{-6}$$

$$= - 0{,}1267 \text{ cm (nach außen)}.$$

Fig. 45 stellt die Biegungsbeanspruchung der linken Ringhälfte durch den Horizontalschub dar.

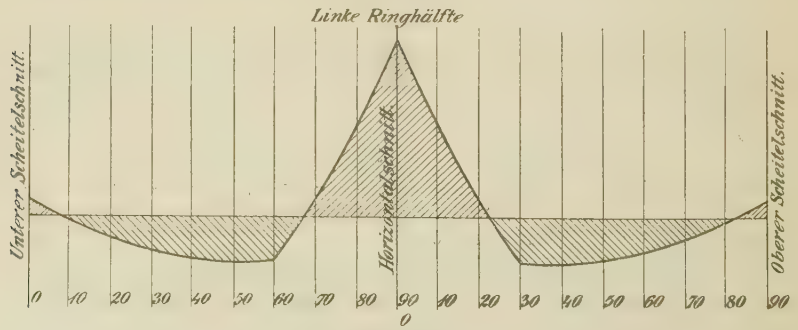


Fig. 45.

Die gesuchte Beanspruchung ergibt sich bei Addition des durch den Horizontalschub hervorgerufenen Spannungszustandes zu jenem bei zwangloser Lagerung:

Im Horizontalschnitte:

das Moment $(-\ 161\,300 + 552\,000)$ cmkg $= +\ 390\,700$ cmkg,

die Normalkraft $-\ (7230 + 2460)$ kg $= -\ 9690$ kg,

die Schubkraft 3260 kg.

Im Schnitte $\varphi = 30^0$:

das Moment $(+\ 317\,500 - 91\,800)$ cmkg $= +\ 225\,700$ cmkg,

die Normalkraft $-\ (6260 + 3770)$ kg $= -\ 10\,030$ kg (links von der Stelle),

$-\ (6260 + 1800)$ kg $= -\ 8060$ kg (rechts von der Stelle).

Die größte Spannung in diesem Querschnitte:

$$\sigma = \frac{225\,700}{3120} + \frac{10\,030}{750} = 86 \text{ atm (Druckseite).}$$

Beanspruchung der horizontalen Doppelstange:

$(4180 - 2490)$ kg $= 1690$ kg Zug.

Beanspruchung der schrägen Doppelstangen:

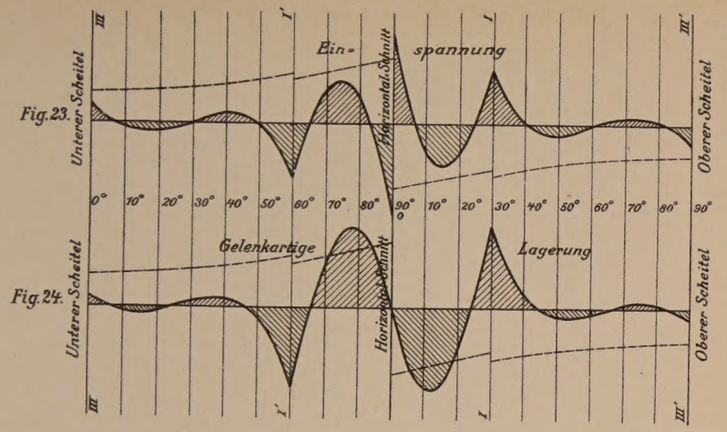
$(4180 + 1420)$ kg $= 5600$ kg Zug.

Die Scheitelverschiebung: $-\ (0{,}1646 + 0{,}1267) = -\ 0{,}29$ cm.

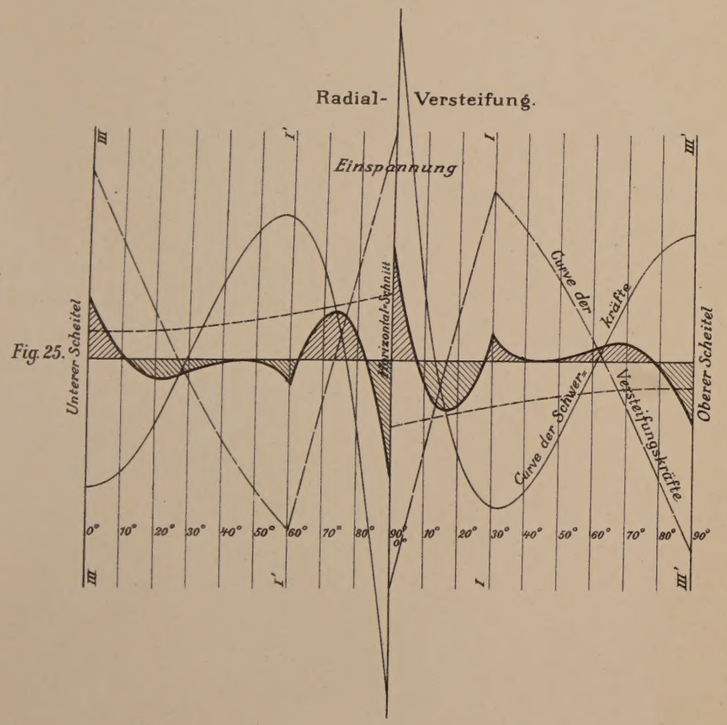
Addiert man die Beanspruchung infolge der Schwerkraft (Spannung der unteren horizontalen Stange 2000 kg) zu der soeben berechneten, so erhält man den Zustand im Gehäuse beim Betriebe. Der Ring und die Spannstangen werden dabei noch normal angestrengt.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

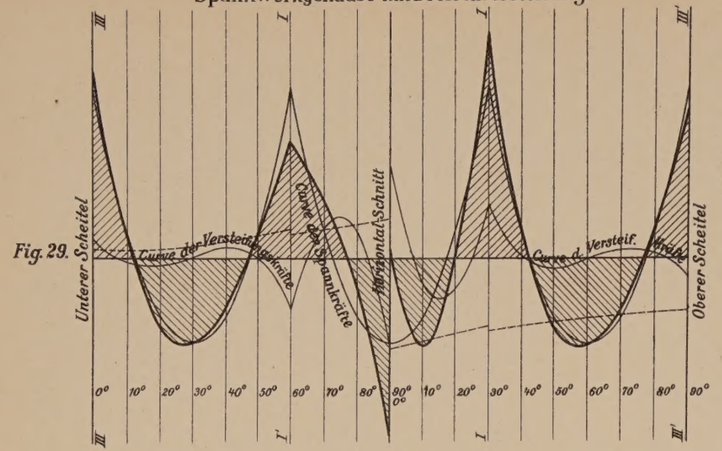
Dreieckversteifung.



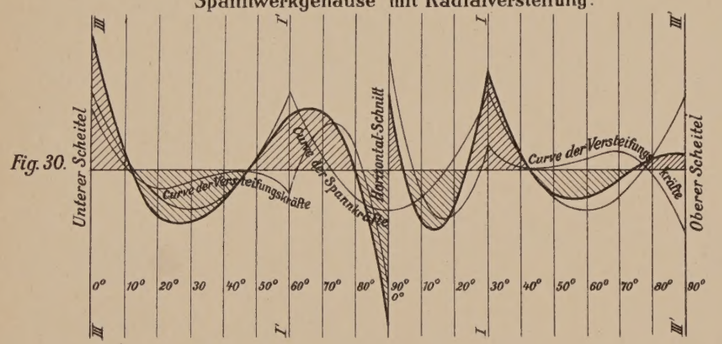
Radial- Versteifung.

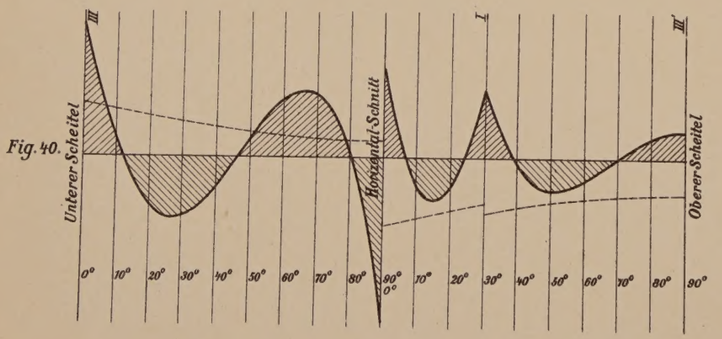


Spannwerkgehäuse mit Dreieckversteifung.

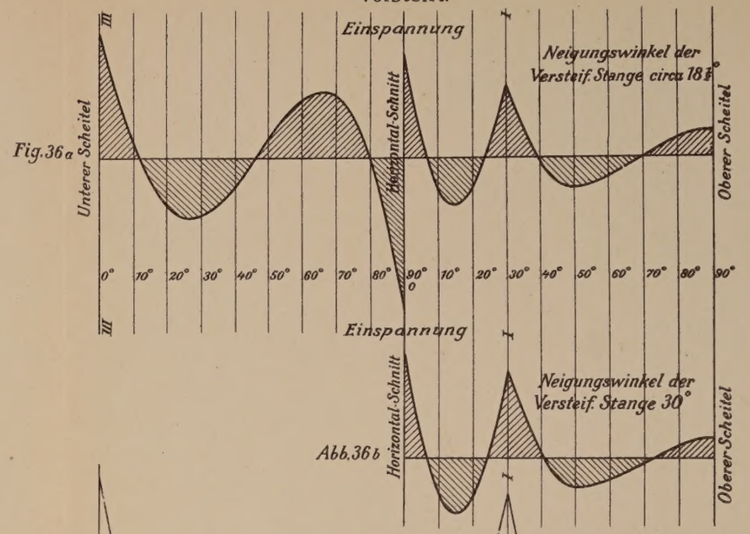


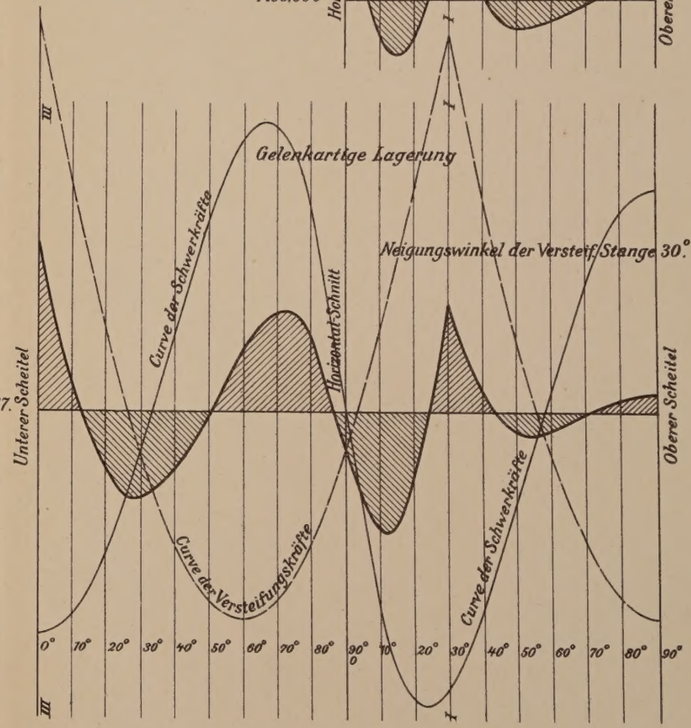
Spannwerkgehäuse mit Radialversteifung.





Gehäuse gegen das Fundament versteift.





Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.